Аппроксимации решений стохастического уравнения теплопроводности и уравнения Белавкина

А. А. Лобода[1]

Для задачи Коши для уравнения Белавкина с двумерным белым шумом

$$d\varphi(t) = \left[\left(-i\widehat{H} - \frac{\mu_1}{2}k^2(\hat{q}) - \frac{\mu_2}{2}h^2(\hat{p})\right)(\varphi(t))\right]dt- \\ - \sqrt{\mu_1}k(\hat{q})(\varphi(t))dW_1(t) - \sqrt{\mu_2}h(\hat{p})(\varphi(t))dW_2(t),$$

где $\widehat{H}$ — это внутренний гамильтониан наблюдаемой системы, а $k(\hat{q})$ и $h(\hat{p})$ — некоммутирующие дифференциальные операторы в работе [1] были построены черновские аппроксимации интегрального представления решения (по обобщённой мере). При этом использовалось обобщение на стохастический случай теоремы Чернова, полученное в работе [4].

Однако возможен и иной подход, в котором белый шум в правой части евклидова аналога уравнения Белавкина (для простоты рассматриваем одномерный белый шум)

$$d\varphi(t) = (\varphi(t))''\,dt + V(q)\varphi(t)dt - \frac{\lambda}{4}q^2\varphi(t)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\varphi(t)dw(t)$$

заменяется на обобщённую производную случайной ломанной, приближающей винеровский процесс (см. [6]). При этом интегральное представление решения задачи Коши для такого уравнения может иметь вид

$$F_k(t_1,t_2)h = \int\limits_{C_0[t_1,t_2]} (h(q+\xi(t_2))) \times \exp\left\{\int_{t_1}^{t_2} V(q+\xi(\tau))d\tau- \right. \\ \left. - \int_{t_1}^{t_2}\frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau + \int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q+\xi(\tau))dB_k(\tau)\right\} w_{t_1,t_2}(d\xi),$$

[1]МГУ им. М. В. Ломоносова. Email: orion1312@yandex.ru

где B_k – случайная функция, определенная на отрезке $[t_1, t_2]$, график которой представляет собой ломаную, проходящую через точки $(\frac{g}{k}, B(\frac{g}{k}))$, $g = 1, 2, \ldots, k$, причем предполагается, что никаких изломов вне перечисленных точек этот график не имеет. Про получение такого интегрального представления можно прочитать в работах [2] и [3]. Такой вид не является единственным, а с его помощью могут быть получены разные интегральные представления решений уравнения Белавкина. Интересны вопросы о построении для таких представлений решений черновских аппроксимаций. При этом представления решений различаются мерами, по которым производится интегрирование. Отдельный интерес представляет изучение этих мер и соответствующих им случайных процессов (подробнее см. [5]).

Литература

1. *Gough J., Obrezkov O. O., Smolyanov O. G.* Randomized Hamiltonian Feynman integrals and Schrödinger-Itô stochastic equations // Izvestiya: Mathematics. — 2005. — Vol. 69, no. 6. — P. 1081–1098.
2. *Loboda A. A.* Itô Method for Proving the Feynman – Kac Formula for the Euclidean Analog of the Stochastic Schrödinger Equation // Differential Equations. — 2018. — Vol. 54, no. 4. — P. 557–561.
3. *Loboda A. A.* The Doss Method for the Stochastic Schrödinger – Belavkin Equation // Mathematical Notes. — 2019. — Vol. 106, no. 2. — P. 311–315.
4. *Obrezkov O. O., Smolyanov O. G., Truman A.* The Generelized Chernoff Theorem and Randomized Feynman Formula // Doklady Mathematics. — 2005. — Vol. 71, no. 1. — P. 105–110.
5. *Orlov Yu. N., Sakbaev V. Z.* Feynman – Kac Formulas for Difference-differential Equations of Retarded Type // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2024. — Vol. 45, no. 6. — P. 2567–2576.
6. *Orlov Yu. N., Sakbaev V. Z., Shmidt E. V.* Compositions of Random Processes in a Hilbert Space and Its Limit Distribution // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2023. — Vol. 44, no. 4. — P. 1432–1447.