Приближение суммами элементов заданного множества в банаховом пространстве

Шкляев Константин Сергеевич

МГУ им. М.В. Ломоносова

Ломоносовские чтения, 2025 г.

Общая задача

Задача (П.А. Бородин, 2012)

Пусть X — банахово пространство. При каких условиях на $M \subset X$ аддитивная полугруппа

$$\mathcal{R}(M) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{M + \cdots + M}_{n},$$

порождённая M, всюду плотна в X?

Мотивировка

Теорема (J. Korevaar, 1964)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область. Тогда наипростейшие дроби

$$\mathrm{SF}(\partial D) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - w_i} : w_i \in \partial D \right\}$$

плотны в $A(D)$.

Мотивировка

Теорема (J. Korevaar, 1964)

Пусть $D \subset \mathbb{C}$ — ограниченная односвязная область. Тогда наипростейшие дроби

$$\mathrm{SF}(\partial D) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{z - w_i} : w_i \in \partial D \right\}$$

плотны в $A(D)$.

Очевидно, $\mathrm{SF}(\partial D) = \mathcal{R}\left(\left\{\frac{1}{z-w} : w \in \partial D\right\}\right)$.

Конечномерный случай

Утверждение. Аддитивная полугруппа $\mathcal{R}(M)$ всюду плотна в $\mathbb{R}^d \iff$ для всякого $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ множество $\mathcal{R}(\{\langle x, y\rangle : x \in M\})$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Конечномерный случай

Утверждение. Аддитивная полугруппа $\mathcal{R}(M)$ всюду плотна в $\mathbb{R}^d \iff$ для всякого $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ множество $\mathcal{R}(\{\langle x, y\rangle : x \in M\})$ всюду плотно в $\mathbb{R}$.

Если $\mathcal{R}(M)$ не плотна в $\mathbb{R}^d$, то найдется такой $y \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, что $\langle M, y\rangle \geq 0$ или $\langle M, y\rangle \subset \mathbb{Z}$.

Введение

Определение 1. Множество $M \subset X$ называется *разносторонним*, если для всякого $f \in X^* \setminus \{0\}$ найдется такой $x \in M$, что $f(x) < 0$.

Введение

Определение 1. Множество $M \subset X$ называется *разносторонним*, если для всякого $f \in X^* \setminus \{0\}$ найдется такой $x \in M$, что $f(x) < 0$.

M — разностороннее $\iff$ $\overline{\mathrm{cone}(M)} = X$.

Введение

Определение 2. Аддитивная полугруппа $\mathcal{R}(M)$ *слабо плотна в* X, если $\overline{\mathcal{R}(f(M))} = \mathbb{R}$ для всякого $f \in X^* \setminus \{0\}$.

Введение

Определение 2. Аддитивная полугруппа $\mathcal{R}(M)$ *слабо плотна в* X, если $\overline{\mathcal{R}(f(M))} = \mathbb{R}$ для всякого $f \in X^* \setminus \{0\}$.

- Слабая плотность — плотность в слабой топологии.

Введение

Определение 2. Аддитивная полугруппа $\mathcal{R}(M)$ *слабо плотна в* X, если $\overline{\mathcal{R}(f(M))} = \mathbb{R}$ для всякого $f \in X^* \setminus \{0\}$.

- Слабая плотность — плотность в слабой топологии.
- Если $M \subset X$ — связное и разностороннее, то $\mathcal{R}(M)$ слабо плотна в X.

Введение

Определение 2. Аддитивная полугруппа $\mathcal{R}(M)$ *слабо плотна в* X, если $\overline{\mathcal{R}(f(M))} = \mathbb{R}$ для всякого $f \in X^* \setminus \{0\}$.

- Слабая плотность — плотность в слабой топологии.
- Если $M \subset X$ — связное и разностороннее, то $\mathcal{R}(M)$ слабо плотна в X.

  Иначе существует такой f, что $\overline{\mathcal{R}(f(M))} \neq \mathbb{R}$. Тогда $f(M)$ связно и не может быть разносторонним в $\mathbb{R}$.

Введение

Определение 2. Аддитивная полугруппа $\mathcal{R}(M)$ *слабо плотна в* X, если $\overline{\mathcal{R}(f(M))} = \mathbb{R}$ для всякого $f \in X^* \setminus \{0\}$.

- Слабая плотность — плотность в слабой топологии.
- Если $M \subset X$ — связное и разностороннее, то $\mathcal{R}(M)$ слабо плотна в X.
- Из слабой плотности $\mathcal{R}(M)$ в X не следует её плотность.

Введение

Естественные условия на множество M:

Введение

Естественные условия на множество M:

- разносторонность + связность;

Введение

Естественные условия на множество M:

- разносторонность + связность;
- слабая плотность $\mathcal{R}(M)$.

Введение

Естественные условия на множество M:

- разносторонность + связность;
- слабая плотность $\mathcal{R}(M)$.

Пример

$\gamma = \{\pm \mathcal{I}_{[0,t]} : t \in [0,1]\}$ — *разносторонняя кривая в* $L_2[0,1]$, *но* $\overline{\mathcal{R}(\gamma)} = L_2^{\mathbb{Z}}[0,1] \neq L_2[0,1]$.

Теорема (КШ, 2023)

Пусть γ — разносторонняя спрямляемая кривая в равномерно гладком б.п. X. Тогда $\overline{\mathcal{R}(\gamma)} = X$.

Определение

Пусть $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *ОНБ пространства* H. *Эллипсоид* $\mathcal{E}_\lambda = \left\{x = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n e_n : \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x_n^2}{\lambda_n^2} \leq 1\right\}$ *называется эллипсоидом Гильберта-Шмидта, или* s*-эллипсоидом, если* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$.

Теорема (КШ, 2024)

Пусть M — подмножество s-эллипсоида. Тогда $\mathcal{R}(M)$ плотна в H $\iff$ $\mathcal{R}(M)$ сл. плотна в H.

Теорема (КШ, 2024)

Пусть M — подмножество s-эллипсоида. Тогда $\mathcal{R}(M)$ плотна в H $\iff$ $\mathcal{R}(M)$ сл. плотна в H.

Следствие

Пусть M — связное подмножество s-эллипсоида. Тогда $\overline{\mathcal{R}(M)} = H \iff M$ — разностороннее.

Определение

Множество $M \subset X$ называется ***сбалансированным****, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всякой δ-сети $x_1, \ldots, x_{2n} \in M$ множества M найдутся такие знаки $\varepsilon_i = \pm 1$, что*

$$\left\| \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i \right\| < \varepsilon, \quad \#\{\varepsilon_i = 1\} = \#\{\varepsilon_i = -1\}.$$

Теорема (КШ, 2024)

Аддитивная полугруппа $\mathcal{R}(M)$, *порожденная разносторонним сбалансированным компактом* $M \subset X$, *плотна в* X.

Балансировка векторов

Пусть K, C — симметричные выпуклые тела в $\mathbb{R}^d$.
Константой балансировки называется число

$$\mathrm{vb}(K, C) := \sup\left\{ \min_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathbf{v}_i \right\|_C : \quad \mathbf{v}_i \in K \right\}$$

Балансировка векторов

Пусть K, C — симметричные выпуклые тела в $\mathbb{R}^d$. **Константой балансировки** называется число

$$\mathrm{vb}(K, C) := \sup\left\{ \min_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \mathbf{v}_i \right\|_C : \quad \mathbf{v}_i \in K \right\}$$

- $\mathrm{vb}(K, K) \le d$ (Bárány, Grinberg, 1981)
- $\mathrm{vb}(E_\lambda, B_2^d) = \left(\sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|^2 \right)^{1/2}$ (Banaszczyk, 1990)
- $\mathrm{vb}(B_1^d, B_\infty^d) = 1$ (Beck, Fiala, 1981)

Схема доказательства теоремы

Требуется для всякой δ-сети $x_1, \ldots x_{2n} \in M$ найти знаки $\varepsilon_i = \pm 1$: $\| \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i \| < \varepsilon$, $\#\{\varepsilon_i = 1\} = n$.

Схема доказательства теоремы

Требуется для всякой δ-сети $x_1, \ldots x_{2n} \in M$ найти знаки $\varepsilon_i = \pm 1$: $\| \sum\limits_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i \| < \varepsilon$, $\#\{\varepsilon_i = 1\} = n$.

1. Разобъем x_i на пары $\|x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}\| < \delta$;

Схема доказательства теоремы

Требуется для всякой δ-сети $x_1, \ldots x_{2n} \in M$ найти знаки $\varepsilon_i = \pm 1$: $\|\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i\| < \varepsilon$, $\#\{\varepsilon_i = 1\} = n$.

1. Разобъем x_i на пары $\|x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}\| < \delta$;
2. Тогда $x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}} \in E_{2\lambda} \cap B_\delta(0)$;

Схема доказательства теоремы

Требуется для всякой δ-сети $x_1, \ldots x_{2n} \in M$ найти знаки $\varepsilon_i = \pm 1$: $\|\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i\| < \varepsilon$, $\#\{\varepsilon_i = 1\} = n$.

1. Разобъем x_i на пары $\|x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}\| < \delta$;
2. Тогда $x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}} \in E_{2\lambda} \cap B_\delta(0)$;
3. $\exists\ E_\mu$, $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_j|^2\right)^{1/2} < \varepsilon$, что $E_{2\lambda} \cap B_\delta(0) \subset E_\mu$;

Схема доказательства теоремы

Требуется для всякой δ-сети $x_1, \ldots x_{2n} \in M$ найти знаки $\varepsilon_i = \pm 1$: $\|\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i x_i\| < \varepsilon$, $\#\{\varepsilon_i = 1\} = n$.

1. Разобъем x_i на пары $\|x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}}\| < \delta$;
2. Тогда $x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}} \in E_{2\lambda} \cap B_\delta(0)$;
3. $\exists$ E_μ, $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\mu_j|^2\right)^{1/2} < \varepsilon$, что $E_{2\lambda} \cap B_\delta(0) \subset E_\mu$;
4. $\exists$ $\varepsilon_k = \pm 1$, что $\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k (x_{i_{2k}} - x_{i_{2k-1}})\right\| < \varepsilon$.

Предложение

Если $d_n(M) < C \cdot n^{-1/2-\varepsilon}$, то M содержится в s-эллипсоиде.

Предложение

Если $d_n(M) < C \cdot n^{-1/2-\varepsilon}$, то M содержится в s-эллипсоиде.

Теорема. Если $\mathcal{R}(M)$ сл. плотна в H и $d_n(M) < C \cdot n^{-1/2-\varepsilon}$, то $\overline{\mathcal{R}(M)} = H$.

Предложение

Если $d_n(M) < C \cdot n^{-1/2-\varepsilon}$*, то* M *содержится в* s*-эллипсоиде.*

Теорема. Если $\mathcal{R}(M)$ сл. плотна в H и $d_n(M) < C \cdot n^{-1/2-\varepsilon}$, то $\overline{\mathcal{R}(M)} = H$.

Следствие. Для разносторонней кривой Γ: $|\Gamma(t) - \Gamma(s)| = O(|t-s|^\alpha)$, $\alpha > 1/2$, выполнено $\overline{\mathcal{R}(\Gamma)} = H$.

Предложение

Если $d_n(M) < C \cdot n^{-1/2-\varepsilon}$, то M содержится в s-эллипсоиде.

Теорема. Если $\mathcal{R}(M)$ сл. плотна в H и $d_n(M) < C \cdot n^{-1/2-\varepsilon}$, то $\overline{\mathcal{R}(M)} = H$.

Следствие. Для разносторонней кривой Γ: $|\Gamma(t) - \Gamma(s)| = O(|t-s|^\alpha)$, $\alpha > 1/2$, выполнено $\overline{\mathcal{R}(\Gamma)} = H$.

Пример. Пусть $\gamma = \{\pm\mathcal{I}_{[0,t]} : t \in [0,1]\}$. Тогда $d_n(\gamma) = O(n^{-1/2})$ и $\overline{\mathcal{R}(\gamma)} \neq L_2[0,1]$.

Замечание. В терминах $d_n(M)$ нельзя охарактеризовать, лежит ли M в s-эллипсоиде.

Замечание. В терминах $d_n(M)$ нельзя охарактеризовать, лежит ли M в s-эллипсоиде.

Пример (В.Н. Судаков, 1963). Существуют такие множества $M_1, M_2 \subset H$, что $d_n(M_1) = d_n(M_2) = \left(\sum\limits_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln^2 k} \right)^{1/2}$, но только одно из них лежит в s-эллипсоиде.

Случай банахова пространства

Теорема (КШ, 2025)

Пусть $M \subset X$ — разностороннее и связное мн-во, причём $d_n(M) < C \cdot n^{-2-\varepsilon}$. Тогда $\overline{\mathcal{R}(M)} = X$.

Случай банахова пространства

Теорема (КШ, 2025)

Пусть $M \subset X$ — разностороннее и связное мн-во, причём $d_n(M) < C \cdot n^{-2-\varepsilon}$. Тогда $\overline{\mathcal{R}(M)} = X$.

Предполагается, что достаточно потребовать $d_n(M) < C \cdot n^{-1-\varepsilon}$.

Случай банахова пространства

Теорема (КШ, 2025)

Пусть $M \subset X$ — разностороннее и связное мн-во, причём $d_n(M) < C \cdot n^{-2-\varepsilon}$. Тогда $\overline{\mathcal{R}(M)} = X$.

Предполагается, что достаточно потребовать $d_n(M) < C \cdot n^{-1-\varepsilon}$.

Пример. $\gamma = \left\{\pm\mathcal{I}_{[0,t]} : t \in [0,1]\right\} \subset L_1[0,1]$.
Тогда $d_n(\gamma) = O(n^{-1})$ и $\overline{\mathcal{R}(\gamma)} \neq L_1[0,1]$.

Следствие (КШ, 2025)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ *— связный компакт,* $f : K \to X$ *—* $(2d+1)$ *раз дифференцируемое отображение и* $f(K)$ *— разностороннее. Тогда* $\overline{\mathcal{R}(f(K))} = X$*.*

Следствие (КШ, 2025)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ *— связный компакт,* $f : K \to X$ *—* $(2d+1)$ *раз дифференцируемое отображение и* $f(K)$ *— разностороннее. Тогда* $\overline{\mathcal{R}(f(K))} = X$.

Замечание. Если f — отображение между комплексными б.п., достаточно проверить, что оно дифференцируемо по Фреше (один раз).

Следствие (КШ, 2025)

Пусть $K \subset \mathbb{R}^d$ — связный компакт, $f : K \to X$ — $(2d+1)$ раз дифференцируемое отображение и $f(K)$ — разностороннее. Тогда $\overline{\mathcal{R}(f(K))} = X$.

Замечание. Если f — отображение между комплексными б.п., достаточно проверить, что оно дифференцируемо по Фреше (один раз).

Пример. Отображение $w \mapsto f_w(z) = \frac{1}{z-w}$ из ∂D в $C(K)$, $K \subset D$, всюду дифференц. по Фреше.

Следствие (КШ)

Для всякой ограниченной односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ *и* $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$, $f(\infty) = 0$, *полугруппа* $\mathcal{R}(\{f(z-w), w \in \partial D\})$ *плотна в* $A(D)$.

Следствие (КШ)

Для всякой ограниченной односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ *и* $f \in \mathcal{O}(\overline{\mathbb{C}} \setminus \{0\})$, $f(\infty) = 0$, *полугруппа* $\mathcal{R}(\{f(z-w), w \in \partial D\})$ *плотна в* $A(D)$.

Отображение $w \mapsto f(z-w)$ из ∂D в $C(K)$ дифференцируемо по Фреше в каждой точке.

Теорема (КШ)

Для всякой ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, суммы $p_a(x) := \frac{1}{|x-a|^{d-2}}$, $a \in \partial\Omega$, и констант всюду плотны в $\mathrm{Harm}(\Omega)$.

Теорема (КШ)

Для всякой ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$, *суммы* $p_a(x) := \frac{1}{|x-a|^{d-2}}$, $a \in \partial\Omega$, *и констант всюду плотны в* $\mathrm{Harm}(\Omega)$.

Вместо $\frac{1}{|x-a|^{d-2}}$ можно взять $p_a(x) = f(x-a)$, где $f \in \mathrm{Harm}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$, $f(x) \to 0$ $(x \to \infty)$.

Схема доказательства

Теорема (КШ, 2025)

Пусть $M \subset X$ *— разностороннее и связное мн-во, причём* $d_n(M) < C \cdot n^{-2-\varepsilon}$. *Тогда* $\overline{\mathcal{R}(M)} = X$.

Схема доказательства

Теорема (КШ, 2025)

Пусть $M \subset X$ — разностороннее и связное мн-во, причём $d_n(M) < C \cdot n^{-2-\varepsilon}$. Тогда $\overline{\mathcal{R}(M)} = X$.

Пусть $d_n(M) < Cn^{-s}$ для некоторого $s > 2$.

Схема доказательства

1. Найдем такие $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, что $\dim(V_k) = 2^k$, $\mathrm{dist}(y, V_k) \leq C2^{-ks} \quad \forall\, y \in M$.

Схема доказательства

1. Найдем такие $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, что $\dim(V_k) = 2^k$, $\mathrm{dist}(y, V_k) \leq C2^{-ks} \quad \forall\, y \in M$.

2. Для всякого V_k найдем базис $v_1^k, \ldots, v_{2^k}^k \in S(V_k)$ и функционалы $f_1^k, \ldots, f_{2^k}^k \in S(V_k^*)$, что $f_i^k(v_j^k) = \delta_{ij}$.

Схема доказательства

1. Найдем такие $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, что $\dim(V_k) = 2^k$, $\mathrm{dist}(y, V_k) \le C2^{-ks} \quad \forall\, y \in M$.

2. Для всякого V_k найдем базис $v_1^k, \ldots, v_{2^k}^k \in S(V_k)$ и функционалы $f_1^k, \ldots, f_{2^k}^k \in S(V_k^*)$, что $f_i^k(v_j^k) = \delta_{ij}$.

3. Выберем $y_k \in V_k$: $\|y - y_k\| \le C2^{-ks}$.

Схема доказательства

1. Найдем такие $V_1 \subset V_2 \subset \ldots$, что $\dim(V_k) = 2^k$, $\mathrm{dist}(y, V_k) \le C2^{-ks} \quad \forall\, y \in M$.

2. Для всякого V_k найдем базис $v_1^k, \ldots, v_{2^k}^k \in S(V_k)$ и функционалы $f_1^k, \ldots, f_{2^k}^k \in S(V_k^*)$, что $f_i^k(v_j^k) = \delta_{ij}$.

3. Выберем $y_k \in V_k$: $\|y - y_k\| \le C2^{-ks}$.

4. Для всякого $y \in M$ имеем $y = \sum_{k=1}^{\infty} (y_k - y_{k-1})$, $y_k - y_{k-1} \in V_k$, $\|y_k - y_{k-1}\| < \widetilde{C}2^{-ks}$.

Схема доказательства

5. $y_k - y_{k-1} = \sum_{j=1}^{2^k} c_j^k v_j^k$, $|c_j^k| < \widetilde{C} 2^{-ks}$. Поэтому

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^k} c_j^k v_j^k \in \widetilde{M} := C_s \cdot \mathrm{conv}\{\pm \widetilde{v}_j^k\}_{j,k},$$

где $\widetilde{v}_j^k := \sqrt{|c_j^k|} v_j^k$, $\|\widetilde{v}_j^k\| < C' 2^{-ks/2}$

Схема доказательства

5. $y_k - y_{k-1} = \sum_{j=1}^{2^k} c_j^k v_j^k$, $|c_j^k| < \widetilde{C} 2^{-ks}$. Поэтому

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^k} c_j^k v_j^k \in \widetilde{M} := C_s \cdot \mathrm{conv}\{\pm \widetilde{v}_j^k\}_{j,k},$$

где $\widetilde{v}_j^k := \sqrt{|c_j^k|} v_j^k$, $\|\widetilde{v}_j^k\| < C' 2^{-ks/2}$

6. Разбиваем элементы δ-сети $x_1, \ldots, x_{2n} \in M$ на пары $\|x_{k_{2i}} - x_{k_{2i-1}}\| < \delta$.

Схема доказательства

7. $x_{j_{2i}} - x_{j_{2i-1}} \in 2\widetilde{M} \cap B_\delta(0)$, т.е.

$$x_{j_{2i}} - x_{j_{2i-1}} = 2C_s \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^k} \lambda_j^k \widetilde{v}_j^k, \text{ где } \sum_{k,j} |\lambda_j^k| \le 1.$$

Схема доказательства

7. $x_{j_{2i}} - x_{j_{2i-1}} \in 2\widetilde{M} \cap B_\delta(0)$, т.е.

$$x_{j_{2i}} - x_{j_{2i-1}} = 2C_s \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^k} \lambda_j^k \widetilde{v}_j^k, \text{ где } \sum_{k,j} |\lambda_j^k| \leq 1.$$

8. $\mathrm{vb}(B_1^d, B_\infty^d) = 1 \Longrightarrow \exists \varepsilon_i = \pm 1$:

$$\sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i (x_{j_{2i}} - x_{j_{2i-1}}) = 2C_s \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^k} \mu_j^k \widetilde{v}_j^k, \text{ где } |\mu_j^k| \leq 1.$$

Тогда $\| \sum_{i=1}^{2n} \varepsilon_i (x_{j_{2i}} - x_{j_{2i-1}}) \| \leq 2C_2 \sum_{k,j} |\mu_j^k| \|\widetilde{v}_j^k\| \to 0$ при $\delta \to 0$.

Спасибо!