ВЫЧЕТЫ ГРОТЕНДИКА И МНОГОЧЛЕНЫ ФРОБЕНИУСА–ПЮИЗО КАК РЕШЕНИЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Задача вычисления сумм кратных рядов Лорана, коэффициенты которых являются рациональными функциями индексов суммирования, то есть, рядов вида

$$\sum_{s:=(s_1,\ldots,s_n)\in S\subset\mathbb{Z}^n} \frac{P(s_1,\ldots,s_n)}{Q(s_1,\ldots,s_n)}\, x_1^{s_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{s_n}, \tag{1}$$

нередко возникает в математической физике, многомерном комплексном анализе, комбинаторной геометрии и теории чисел. Здесь $(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^n$ – вектор комплексных переменных, $P,Q\in\mathbb{C}[s_1,\ldots,s_n]$ – многочлены, ни один из которых не обращается в нуль на множестве суммирования S.

В одномерном случае (то есть, при $n=1$) из формулы Коши–Адамара следует, что ряд (1) может иметь непустую область сходимости лишь в случае, когда множество суммирования S ограничено либо сверху, либо снизу. В любом из этих случаев сумма данного ряда может быть выражена через трансцендентную функцию Лерха. В некоторых частных случаях сумма одномерного ряда вида (1) допускает представление в терминах классических функций гипергеометрического типа. Например,

$$\sum_{s=0}^{\infty}\frac{x^s}{s^2+1} = \frac{{}_2F_1(\sqrt{-1},1;1+\sqrt{-1};x)\,+\,{}_2F_1(-\sqrt{-1},1;1-\sqrt{-1};x)}{2},$$

где ${}_2F_1$ – гипергеометрическая функция Гаусса.

В полной своей общности задача суммирования степенного ряда,чьи коэффициенты рационально образом зависят от индексов суммирования, представляется безнадежно трудной. С ростом степеней и числа мономов в многочленах P и Q сумма ряда (1) быстро превращается в росток безымянной многозначной специальной функции, не допускающей представления через распространенные специальные функции математической физики. В настоящем докладе рассматривается важный класс рядов вида (1), для элементов которого множество суммирования определенным образом согласовано с дивизорами его рационального коэффициента. Многозначные голоморфные функции, определенные с помощью аналитического продолжения сумм таких рядов вдоль всех возможных путей в пространстве переменных, не пересекающих множества особенностей данных функций, известны как гипергеометрические функции нескольких комплексных переменных.

В качестве основного инструмента изучения свойств сумм гипергеометрических рядов вида (1) используются системы дифференциальных уравнений в частных производных с полиномиальными коэффициентами, решениями которых являются исследуемые ряды. В одномерном случае все решения таких уравнений могут быть найдены с помощью классического метода Фробениуса [1, 2]. Известно, что базис Фробениуса позволяет дать лаконичное описание группы монодромии обыкновенного дифференциального уравнения гипергеометрического типа. При весьма общих предположениях относительно свойств регулярного голономного идеала в алгебре Вейля линейных дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами имеет место структурная теорема, дающая общий вид его голоморфных решений, и представляющая собой современную многомерную алгебро-аналитическую версию классического результата Фробениуса. В настоящем докладе теория вычетов Гротендика для мероморфных форм с несколькими комплексными переменными применяется для построения решений систем дифференциальных уравнений гипергеометрического типа в классе многочленов Пюизо, а также в более широком классе специальных функций, называемых в дальнейшем *многочленами Фробениуса–Пюизо,* и представляющих суммы кратных рядов вида (1).

Список литературы

[1] G. Frobenius. Über die Integration der linearen Differentialgleichungen durch Reihen, J. Reine Angew. Math. 76 (1873), 214–235.
[2] Э.Л. Айнс. Обыкновенные дифференциальные уравнений. RUGRAM, 2024.