

1 Интуиционистская логика Int

$$\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{\Gamma, \perp \Rightarrow C}$$

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C} (\wedge L_1) \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \wedge B \Rightarrow C} (\wedge L_2) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \wedge B} (\wedge R) \\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \vee B \Rightarrow C} (\vee L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} (\vee R_1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \vee B} (\vee R_2) \\ \frac{\Pi \Rightarrow B \quad \Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, \Pi, B \rightarrow A \Rightarrow C} (\rightarrow L) \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow B \rightarrow A} (\rightarrow R) \\ \frac{\Gamma, A[z/x] \Rightarrow C}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow C} (\exists L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A} (\exists R) \\ \frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow C}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow C} (\forall L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[z/x]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A} (\forall R) \end{array}$$

(здесь t — произвольный терм, а z — переменная, не входящая свободно в Γ, C)

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C}{\Gamma, A \Rightarrow C} (W) \quad \frac{\Gamma, A, A \Rightarrow C}{\Gamma, A \Rightarrow C} (C)$$

2 Интуиционистская линейная логика ILL

Аксиомы

$$\overline{A \Rightarrow A} \quad \overline{\Gamma, \mathbf{0} \Rightarrow C} (\mathbf{0}L) \quad \overline{\Gamma \Rightarrow \top} (\top R)$$

Константы

$$\frac{\Gamma \Rightarrow C}{\Gamma, \mathbf{1} \Rightarrow C} (\mathbf{1}L) \quad \overline{\Rightarrow \mathbf{1}} (\mathbf{1}R)$$

Мультиплекативные операции

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow C} (\otimes L) \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow A \quad \Gamma_2 \Rightarrow B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow A \otimes B} (\otimes R) \\ \frac{\Pi \Rightarrow B \quad \Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, \Pi, B \multimap A \Rightarrow C} (\multimap L) \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow B \multimap A} (\multimap R) \end{array}$$

Аддитивные операции

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, A \& B \Rightarrow C} (\& L_1) \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \& B \Rightarrow C} (\& L_2) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A \quad \Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \& B} (\& R) \\ \frac{\Gamma, A \Rightarrow C \quad \Gamma, B \Rightarrow C}{\Gamma, A \oplus B \Rightarrow C} (\oplus L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} (\oplus R_1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow B}{\Gamma \Rightarrow A \oplus B} (\oplus R_2) \end{array}$$

Кванторы

$$\begin{array}{c} \frac{\Gamma, A[z/x] \Rightarrow C}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow C} (\exists L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \exists x A} (\exists R) \\ \frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow C}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow C} (\forall L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow A[z/x]}{\Gamma \Rightarrow \forall x A} (\forall R) \end{array}$$

Экспоненциалы

$$\frac{\Gamma, A \Rightarrow C}{\Gamma, !A \Rightarrow C} (!L) \quad \frac{!\Gamma \Rightarrow A}{!\Gamma \Rightarrow !A} (!R) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow C}{\Gamma, !A \Rightarrow C} (!W) \quad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow C}{\Gamma, !A \Rightarrow C} (!C)$$

3 Классическая линейная логика LL

Аксиомы

$$\frac{}{A \Rightarrow A} \quad \frac{}{\Gamma, \mathbf{0} \Rightarrow \Delta} (\mathbf{0}L) \quad \frac{}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \top} (\top R)$$

Константы

$$\frac{}{\perp \Rightarrow (\perp L)} \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \perp} (\perp R) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \mathbf{1} \Rightarrow \Delta} (\mathbf{1}L) \quad \frac{}{\Rightarrow \mathbf{1}} (\mathbf{1}R)$$

Мультиплексивные операции

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma, A, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \otimes B \Rightarrow \Delta} (\otimes L) \quad \frac{\Gamma_1 \Rightarrow \Delta_1, A \quad \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_2, B}{\Gamma_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2, A \otimes B} (\otimes R) \\ & \frac{\Gamma_1, A \Rightarrow \Delta_1 \quad \Gamma_2, B \Rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1, \Gamma_2, A \wp B \Rightarrow \Delta_1, \Delta_2} (\wp L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \wp B} (\wp R) \\ & \frac{\Pi \Rightarrow \Sigma, B \quad \Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \Pi, B \multimap A \Rightarrow \Delta, \Sigma} (\multimap L) \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, B \multimap A} (\multimap R) \end{aligned}$$

Аддитивные операции

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \& B \Rightarrow \Delta} (\&L_1) \quad \frac{\Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \& B \Rightarrow \Delta} (\&L_2) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \quad \Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \& B} (\&R) \\ & \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta \quad \Gamma, B \Rightarrow \Delta}{\Gamma, A \oplus B \Rightarrow \Delta} (\oplus L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B} (\oplus R_1) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, B}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A \oplus B} (\oplus R_2) \end{aligned}$$

Отрицание

$$\frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma, A^\perp \Rightarrow \Delta} (\perp L) \quad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, A^\perp} (\perp R)$$

Кванторы

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma, A[z/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \exists x A \Rightarrow \Delta} (\exists L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[t/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \exists x A} (\exists R) \\ & \frac{\Gamma, A[t/x] \Rightarrow \Delta}{\Gamma, \forall x A \Rightarrow \Delta} (\forall L) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A[z/x]}{\Gamma \Rightarrow \Delta, \forall x A} (\forall R) \end{aligned}$$

Экспоненциалы

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma, A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} (!L) \quad \frac{!\Gamma \Rightarrow ?\Delta, A}{!\Gamma \Rightarrow ?\Delta, !A} (!R) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} (!W) \quad \frac{\Gamma, !A, !A \Rightarrow \Delta}{\Gamma, !A \Rightarrow \Delta} (!C) \\ & \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A} (?L) \quad \frac{!\Gamma, A \Rightarrow ?\Delta}{!\Gamma, ?A \Rightarrow ?\Delta} (?R) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A} (?W) \quad \frac{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A, ?A}{\Gamma \Rightarrow \Delta, ?A} (?C) \end{aligned}$$