



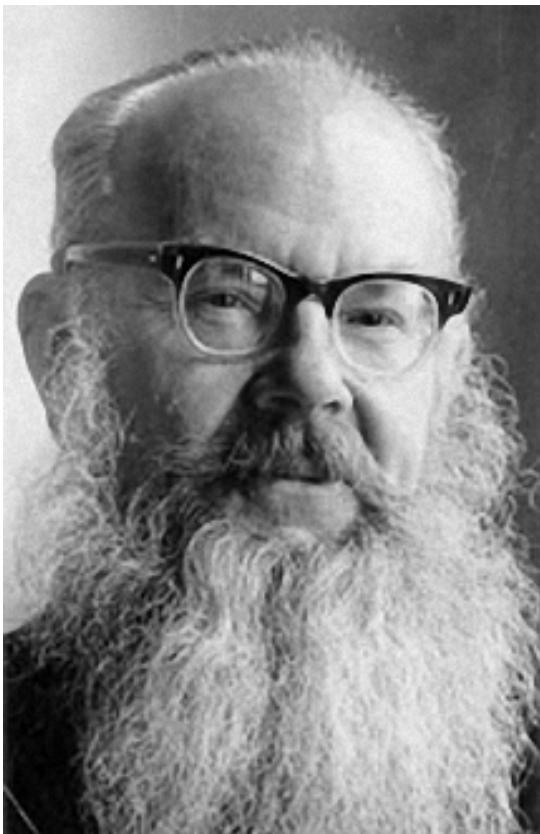
Научно-историческая конференция
«Вклад математиков и
криптографов в Победу»
г. Москва, 22 апреля 2025 г.

**«В.Я. Козлов. Первый этап
научного пути»**

Б. С. Кашин (МИАН)



Иван Яковлевич Верченко (1907 – 1995)
Георгий Павлович Толстов (1911 – 1981)
Владимир Яковлевич Козлов (1914 – 2007)





Темы научных работ В.Я. Козлова до 1951 г.

- I) Представление функций тригонометрическими и общими ортогональными рядами**
- II) Ряды по системам $\{\varphi(nx)\}$ и их обобщениям**
- III) Свойства полных ортонормированных систем общего вида**
- IV) Фреймы (термин введен позже)**

I) Теорема Кантора, 1872 г.

Пусть тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (1)$$

сходится к нулю для каждого $x \in (0, 2\pi)$.

Тогда все коэффициенты этого ряда равны нулю.

Теорема Меньшова, 1916 г.

Существует нуль ряд по тригонометрический системе, т.е. нетривиальный ряд вида (1), который сходится к нулю для почти всех $(0, 2\pi)$.

В 1937 г. В.Я. Козлов доказал, что никакой нуль ряд не может иметь двух точек на расстоянии не соизмеримом с π , в которых он сходится абсолютно.

Хорошо известен следующий пример В.Я. Козлова.

Теорема (В.Я. Козлов, 1950)

Существуют нетривиальный ряд вида (1) и последовательность натуральных чисел $N_j \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow \infty$ такие, что для каждого $x \in (0, 2\pi)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{N_j}(x) = 0,$$

где $S_{N_j}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N_j} a_k \cos kx + b_k \sin kx$.

Теорема (G. Kozma, A. Olevskii, 2020)

В теореме В.Я. Козлова можно дополнительно обеспечить стремление к нулю коэффициентов a_k и b_k при $k \rightarrow \infty$.

II) Докторская диссертация В.Я. Козлова
«О системах функций типа $\{\varphi(nx)\}$ и
мультипликативных системах изометрических
операторов в пространстве $L^2(0, 2\pi)$ »

(Защита в МГУ 14 марта 1951 г.,
оппоненты Д.Е. Меньшов, Н.К. Бари,
И.М. Гельфанд.)

Системы $\{\varphi(nx)\}$ обобщают
тригонометрическую систему и возникают
в различных областях математики. Еще
в 1859 г. П.Л. Чебышёв рассматривал
случай $\varphi_0(x) = \operatorname{sign} \sin x$ и нашел
биортогональную систему к $\varphi_0(nx)$.

«Но как ни интересны и важны общие результаты, касающиеся, например, всех базисов или всех биортогональных систем в данном пространстве, подробное исследование конкретных систем функций раскрывало новые свойства, не вытекающие из общих теорем.»

В.Я. Козлов

**В.Я. Козлов определяет A -совершенные
(т.е. арифметически совершенные) системы
функций, т.е. такие системы $\Psi = \{\psi_j\}$, что
вместе с каждой функцией $\psi_j(x)$
в систему входит и $\psi_j(nx)$.**

**Класс таких систем включает, конечно,
системы $\{\varphi(nx)\}_{n=1}^{\infty}$.**

Некоторые результаты:

a) *A*-совершенная система, порожденная одной функцией, неполна в $L^2(0, 2\pi)$;

b) Две функции могут порождать *A*-совершенную полную систему, например,

$$f_1 = 1 + \cos x, \quad f_2 = 1 + \sin x.$$

c) Теорема. *A*-совершенная система может быть полной ортонормированной системой в $L^2(0, 2\pi)$ тогда и только тогда, когда она порождена тремя функциями

$$f_0 = 1, \quad f_1 = A_1 \cos x + B_1 \sin x,$$

$$f_2 = A_2 \cos x + B_2 \sin x,$$

Причем $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$.

**В 80-х годах прошлого века
были построены и нашли широкое
применение в практических задачах
полные в $L^2(\mathbb{R})$, ортонормированные
системы вейвлетов (всплесков),
порожденные одной функцией ψ и
двуухпараметрической системой
преобразований:
 $\Psi = \{2^{k/2}\psi(2^kx - l), x \in \mathbb{R}, k, l \in \mathbb{Z}\}.$**

III) Теорема (W. Orlicz, 1927)

Пусть $\Phi = \{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ – полная в $L^2(0, 1)$ ортонормированная система функций. Тогда

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j^2(x) = \infty \text{ для п.в. } x \in (0, 1).$$

Теорема (В.Я. Козлов, 1948)

В условиях теоремы Орлича

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j^+(x))^2 = \infty, \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j^-(x))^2 = \infty$$

для п.в. $x \in (0, 1)$, где

$$\varphi_j^+(x) = \begin{cases} \varphi_j(x), & \text{если } \varphi_j(x) > 0 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases},$$

$$\varphi_j^-(x) = \varphi_j(x) - \varphi_j^+(x).$$

IV) Фреймы

Определение (R. Duffin, A. Schaeffer, 1952)

(Жесткий) фрейм – это система элементов $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ гильбертова пространства H такая, что для любого элемента $f \in H$

$$\|f\|_H^2 = \sum_{j=1}^{\infty} (f, \varphi_j)^2.$$

Определение (В.Я. Козлов, 1948)

Система функций $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ на $[a, b]$ удовлетворяет системе уравнений Парсеваля, если для любой пары интервалов Δ_1 и Δ_2 из $[a, b]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta_1 F_n \Delta_2 F_n = \text{meas} (\Delta_1 \cap \Delta_2),$$

где $\Delta F = F(z) - F(y)$, если $\Delta = (y, z)$.

Если $F_n(t) = \int_a^t \varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots,$

где $\{\varphi_n\}$ – полная ортонормированная система

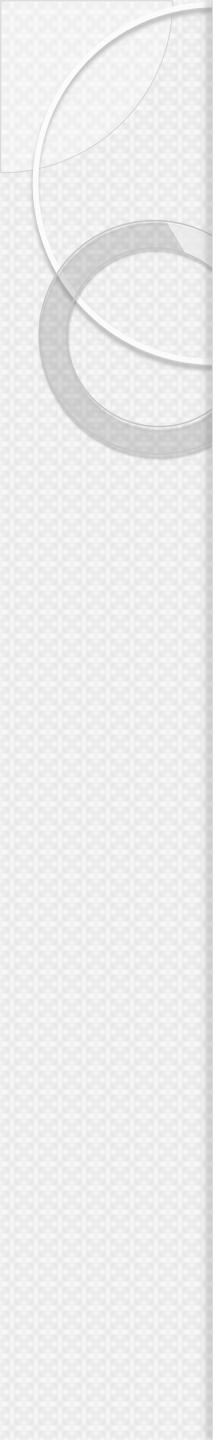
в $L^2 [a, b]$, то очевидно, что

$$\sum_n \int_{\Delta_1} \varphi_n(x)dx \int_{\Delta_2} \varphi_n(x)dx = \text{meas} (\Delta_1 \cap \Delta_2).$$

Аналогично проверяется, что система

$\left\{ \int_a^t \varphi_j(x)dx \right\}_{j=1}^{\infty}$ удовлетворяет уравнениям

Парсеваля, если $\{\varphi_j\}$ – произвольный жесткий
фрейм в $L^2 [a, b]$.



**Фактически проинтегрированные
жесткие фреймы и системы,
рассматриваемые В.Я. Козловым,
— это одно и то же.**

**О применениях фреймов см.
специализированные монографии.**