Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 11. Локальное по времени кинетическое уравнение. Кумулянты Кубо - ван Кампена

Терётенков Александр Евгеньевич

14 апреля 2025 г.

В прошлой лекции...

Утверждение. Уравнение Накадзимы-Цванцига (Nakajima, 1958; Zwanzig, 1960):

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^t \mathcal{K}_s^t\rho_s ds$$

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}, \qquad \mathcal{I}_t = \lambda\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_{t_0}^t\mathcal{Q},$$

$$\mathcal{G}_s^t = \overleftarrow{\mathrm{T}}\exp\left(\lambda\int_s^t \mathcal{Q}\mathcal{L}_\tau d\tau\right), \quad \mathcal{G}_s^s = I$$

В прошлой лекции...

Как правило, рассматривают случай, когда $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$, тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{I}_t\rho_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \mathcal{K}_s^t \rho_s ds$$

В частности для $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = -i(\mathrm{Tr}_B[H_I(t), \rho_S \otimes \rho_B]) \otimes \rho_B = -i[\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B), \rho_S] \otimes \rho_B$$

Таким образом, $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\rho = 0$, если $\mathrm{Tr}_B(H_I(t)\rho_B) = 0$.
Это выполнено в случае, когда рассматривается гауссовский бозонный резервуар с нулевым средним, а $H_I(t)$ — линеен по операторам рождения и уничтожения. Более того, в этом случае обнуление моментов нечётного порядка даёт

$$\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1} \cdots \mathcal{L}_{t_{2k}}\mathcal{P} = 0,$$

что также часто предполагается.

В прошлой лекции...

Член $\mathcal{I}_t \rho_{t_0}$ характеризует насколько начальное состояние согласовано с проекцией. Если $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$, то $\mathcal{I}_t \rho_{t_0} = 0$. В случае проектора $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$, $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$ соответствует факторизованным начальным состояниям вида $\rho_{t_0} = \rho_S(t_0) \otimes \rho_B$.

Метод проекционных операторов Накадзимы — Цванцига

Если $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} = 0$ и $\mathcal{P}\rho_{t_0} = \rho_{t_0}$, то первый неисчезающий член — второго порядка по λ

$$\mathcal{K}_s^t = \lambda^2 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{G}_s^t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \lambda^2\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} + O(\lambda^3)$$

С учётом $\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_s\mathcal{P} = \mathcal{Q}\mathcal{L}_s\mathcal{P}$, имеем

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_s\mathcal{P}\rho_s ds$$

— уравнение в приближении Борна.

Метод проекционных операторов Накадзимы — Цванцига

В случае $\mathcal{P} = \mathrm{tr}_B(\cdot) \otimes \rho_B$, то оно принимает вид

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) \otimes \rho_B = -\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]ds \otimes \rho_B$$

"Сокращая" на ρ_B, имеем

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -\lambda^2 \int_{t_0}^{t} \mathrm{Tr}_B[H_I(t), [H_I(s), \rho_S(s) \otimes \rho_B]]ds$$

— такое уравнение уже возникало при "физическом" выводе уравнений.

Локальное по времени уравнение

Теорема

$$\frac{d}{dt}\rho_t = \lambda \mathcal{L}_t \rho_t.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P}\rho_t = \mathcal{K}(t)\mathcal{P}\rho_t + \mathcal{I}(t)\mathcal{Q}\rho_{t_0},$$

где $\mathcal{Q} = I - \mathcal{P}$*,*

$$\mathcal{K}(t) \equiv \left(\frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P})^{(-1)},$$

$$\mathcal{I}(t) \equiv \frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{Q} - \mathcal{K}(t)\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{Q},$$

где $\mathcal{U}_{t_0}^t$ *— решение задачи Коши* $\frac{d}{dt}\mathcal{U}_{t_0}^t = \lambda\mathcal{L}_t\mathcal{U}_{t_0}^t, \mathcal{U}_{t_0}^{t_0} = I$*, при достаточно малых* t *или* λ*.*

Локальное по времени уравнение

Псевдообратный

$$\mathcal{A}^{(-1)}$$

выбирается так, что

$$\mathcal{A}^{(-1)}\mathcal{A} = \mathcal{P}, \qquad \mathcal{A}^{(-1)}\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\mathcal{A}^{(-1)} = 0.$$

Локальное по времени уравнение

Доказательство.

$$\rho_t = \mathcal{U}_{t_0}^t \rho_{t_0},$$

где $\mathcal{U}_{t_0}^t$ — решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U}_{t_0}^t = \lambda \mathcal{L}_t \mathcal{U}_{t_0}^t, \qquad \mathcal{U}_{t_0}^{t_0} = I.$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t =& \frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P} + \frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{Q} \\
=& \left(\frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P})^{(-1)}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P} + \frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{Q} \\
=& \left(\frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P})^{(-1)}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t \\
& - \left(\frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P}\right)(\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{P})^{(-1)}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{Q} + \frac{d}{dt}\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t\mathcal{Q}. \quad \square
\end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

Теорема

При $\lambda \to 0$ выполнено следующее асимптотическое разложение

$$\mathcal{K}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{K}_n(t),$$

$$\mathcal{K}_n(t) = \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^{q} k_j = n, k_j \geqslant 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \ldots \mathcal{M}_{k_q}(t),$$

$$\mathcal{M}_k(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_k} \mathcal{P},$$

$$\dot{\mathcal{M}}_k(t) \equiv \frac{d}{dt} \mathcal{M}_k(t).$$

Лемма. При $\lambda \to 0$

$$\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathcal{A}_k\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \sum_{\sum_{j=1}^{q} k_j = n, k_j \geqslant 1} \mathcal{A}_{k_1} \dots \mathcal{A}_{k_q},$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
\left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathcal{A}_k\right)^{-1} &= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \mathcal{A}_k\right)^q \\
&= \sum_{q=0}^{\infty} (-1)^q \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\sum_{j=1}^{q} k_j = n, k_j \geqslant 1} \mathcal{A}_{k_1} \dots \mathcal{A}_{k_q} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{\sum_{j=1}^{q} k_j = n, k_j \geqslant 1} (-1)^q \mathcal{A}_{k_1} \dots \mathcal{A}_{k_q}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы.

$$\mathcal{U}_{t_0}^t = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_k}.$$

$$\mathcal{K}(t) \equiv \frac{d}{dt} \mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P} \left(\mathcal{P}\mathcal{U}_{t_0}^t \mathcal{P}\right)^{(-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \dot{\mathcal{M}}_k(t) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m \mathcal{M}_m(t) \right)^{(-1)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \dot{\mathcal{M}}_k(t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{q=0}^{n} (-1)^q \sum_{\sum_{j=1}^q k_j = n, k_j \geqslant 1} \mathcal{M}_{k_1}(t) \ldots \mathcal{M}_{k_q}(t) \right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^q k_j = n, k_j \geqslant 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \ldots \mathcal{M}_{k_q}(t). \qquad \square$$

Локальное по времени уравнение

Теорема

При $\lambda \to 0$ выполнено следующее асимптотическое разложение

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \mathcal{I}_n(t),\\
\mathcal{I}_n(t) &= \dot{\tilde{\mathcal{M}}}_n(t)\\
&+ \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^{q} k_j = n, k_j \geqslant 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \ldots \mathcal{M}_{k_{q-1}}(t) \tilde{\mathcal{M}}_{k_q}(t),\\
\tilde{\mathcal{M}}_k(t) &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \ldots \int_{t_0}^{t_{k-1}} dt_k \mathcal{P} \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_k} \mathcal{Q},\ \dot{\tilde{\mathcal{M}}}_k(t) \equiv \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{M}}_k(t).
\end{aligned}
$$

Доказательство.

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n \dot{\tilde{\mathcal{M}}}_n(t)$$

$$- \left(\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \sum_{q=0}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^{q} k_j = n, k_j \geqslant 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \ldots \mathcal{M}_{k_q}(t) \right) \cdot$$

$$\cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k \dot{\tilde{\mathcal{M}}}_k(t) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^n \Bigg(\dot{\tilde{\mathcal{M}}}_n(t)$$

$$+ \sum_{q=1}^{n-1} (-1)^q \sum_{\sum_{j=0}^{q} k_j = n, k_j \geqslant 1} \dot{\mathcal{M}}_{k_0}(t) \mathcal{M}_{k_1}(t) \ldots \mathcal{M}_{k_{q-1}}(t) \tilde{\mathcal{M}}_{k_q}(t) \Bigg) . \square$$

Локальное по времени уравнение

Первые члены

$$\mathcal{M}_0(t) = \mathcal{P},$$

$$\mathcal{M}_1(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P},$$

$$\mathcal{M}_2(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P},$$

$$\mathcal{M}_3(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P},$$

$$\mathcal{M}_4(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \int_{t_0}^{t_3} dt_4 \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{L}_{t_4}\mathcal{P}$$

Локальное по времени уравнение

$n = 1$. Композиции: 1

$$\mathcal{K}_1(t) = \dot{\mathcal{M}}_1(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}$$

$n = 2$. Композиции: $2 = 1 + 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_2(t) &= \dot{\mathcal{M}}_2(t) - \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_1(t) \\
&= \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} \\
&= \int_{t_0}^{t} dt_1 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})
\end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

$n = 3$. Композиции: $3 = 2 + 1 = 1 + 2 = 1 + 1 + 1$

$$\mathcal{K}_3(t) = \dot{\mathcal{M}}_3(t) - \dot{\mathcal{M}}_2(t)\mathcal{M}_1(t) - \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_2(t) + \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_1(t)\mathcal{M}_1(t)$$

$n = 4$. Композиции: $4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 1 + 3 = 2 + 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 1 + 1 + 2 = 1 + 1 + 1 + 1$

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_4(t) =& \dot{\mathcal{M}}_4(t) - \dot{\mathcal{M}}_3(t)\mathcal{M}_1(t) - \dot{\mathcal{M}}_2(t)\mathcal{M}_2(t) - \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_3(t) + \\ &+ \dot{\mathcal{M}}_2(t)\mathcal{M}_1(t)\mathcal{M}_1(t) + \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_2(t)\mathcal{M}_1(t) \\ &+ \dot{\mathcal{M}}_1(t)\mathcal{M}_1(t)\mathcal{M}_2(t) - \dot{\mathcal{M}}_1(t)(\mathcal{M}_1(t))^3\end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

В случае обнуления нечётных комбинаций $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_{2m}}\ldots\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}=0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_3(t) =& 0,\\
\mathcal{K}_4(t) =& \dot{\mathcal{M}}_4(t) - \dot{\mathcal{M}}_2(t)\mathcal{M}_2(t)\\
=& \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\\
&- \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}
\end{aligned}$$

Локальное по времени уравнение

Упорядочение интегралов по времени

$$\int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 f(t_1,t_2,t_3) = \int\limits_{\substack{t\geqslant t_1\geqslant t_0\\ t\geqslant t_2\geqslant t_3\geqslant t_0}} dt_1 dt_2 dt_3 f(t_1,t_2,t_3)$$

$$= \int\limits_{t\geqslant t_1\geqslant t_2\geqslant t_3\geqslant t_0} dt_1 dt_2 dt_3 f(t_1,t_2,t_3) + \int\limits_{t\geqslant t_2\geqslant t_1\geqslant t_3\geqslant t_0} dt_1 dt_2 dt_3 f(t_1,t_2,t_3)$$

$$+ \int\limits_{t\geqslant t_2\geqslant t_3\geqslant t_1\geqslant t_0} dt_1 dt_2 dt_3 f(t_1,t_2,t_3)$$

$$= \int\limits_{t\geqslant t_1\geqslant t_2\geqslant t_3\geqslant t_0} dt_1 dt_2 dt_3 (f(t_1,t_2,t_3) + f(t_2,t_1,t_3) + f(t_3,t_1,t_2))$$

Локальное по времени уравнение

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_4(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \cdot \\
\cdot \Big(&\mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_1)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_2)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} \\
&- \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}(t)\mathcal{L}(t_3)\mathcal{P}\mathcal{L}(t_1)\mathcal{L}(t_2)\mathcal{P} \Big)
\end{aligned}
$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Заметим, что между проекторами $\mathcal{P}$ произведения упорядочены по времени. Оказывается, что в общем случае верна формула

$$\mathcal{K}^{(n)}(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{t_0}^{t_{n-2}} dt_{n-1} \kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_{n-1}}),$$

где $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \ldots \mathcal{L}_{t_{n-1}})$ — *частично упорядоченные кумулянты (Кубо - ван Кампена)*. (Для компактности дальнейших формул переобозначим $\mathcal{L}_t = \mathcal{L}(t)$.)

Локальное по времени кинетическое уравнение

1. Пишем строчку $\mathcal{P}\mathcal{L}\ldots\mathcal{L}\mathcal{P}$.
2. На её основе пишем все возможные строчки, вставляя операторы $\mathcal{P}$ так, чтобы получившая строчка содержала хотя бы один символ $\mathcal{L}$ между двумя операторами $\mathcal{P}$ и ставим знак $(-1)^{\#\mathcal{P}}$, где $\#\mathcal{P}$ — количество вставленных операторов $\mathcal{P}$.
3. Добавляем к первому символу $\mathcal{L}$ индекс t, а к остальным индексы t так, чтобы между любой парой супероператоров $\mathcal{P}$ индексы t_k были упорядочены по возростанию индекса k. Если таких способов несколько, то выписываем все возможные способы, сохраняя знак, получившийся на предыдущем шаге.
4. Складываем получившиеся члены с учётом знаков.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1})$ - ?

1. $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{P}$.
2. $\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{L}\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}$.
3. $\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$, $-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$
4. $\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}$

Локальное по времени кинетическое уравнение

$\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3})$ - ?

1. $\mathcal{PLLLLP}$.
2. $\mathcal{PLLLLP}$, $-\mathcal{PLPLLLP}$, $-\mathcal{PLLPLLP}$, $-\mathcal{PLLLPLP}$,$\mathcal{PLLPLPLP}$,$\mathcal{PLPLLPLP}$,$\mathcal{PLPLPLLP}$, $-\mathcal{PLPLPLPLP}$.
3. $-\mathcal{PLLPLLP} \to$ $-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}, -\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}, -\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}$
4.

Локальное по времени кинетическое уравнение

$$
\begin{gathered}
\kappa_{p.o.}(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}) = \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}} - \\
-\underline{\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} + \\
+\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
-\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}
\end{gathered}
$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Несколько более компактный вид (Chaturvedi, Shibata, 1979)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{K}_1(t) &= \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{P} \\
\mathcal{K}_2(t) &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} \\
\mathcal{K}_3(t) &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}) \\
\mathcal{K}_4(t) &= \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
&\quad - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} + \\
&\quad + \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
&\quad - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P})
\end{aligned}
$$

Локальное по времени кинетическое уравнение

Аналогично (Chang, Skinner, 1993)

$$\mathcal{I}_1(t) = \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}$$

$$\mathcal{I}_2(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}$$

$$\mathcal{I}_3(t) = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 (\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_t^{(4)} = \int_{t_0}^{t} dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 (&\mathcal{Q}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} - \\
&- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} + \\
&+ \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{Q} - \\
&- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{Q}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{Q})
\end{aligned}$$

Пример

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(L^2(\mathbb{R}))$$

$$\hat{H}_{\text{SB}}^{\text{RWA}} = \int \omega_k I \otimes b_k^\dagger b_k dk + \Omega \sigma_+ \sigma_- \otimes I + \int \left(g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k \sigma_+ \otimes b_k \right) dk.$$

$$\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t) = \int \left(e^{i(\omega_k - \Omega)t} g_k^* \sigma_- \otimes b_k^\dagger + g_k e^{-i(\omega_k - \Omega)t} \sigma_+ \otimes b_k \right) dk$$

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[\hat{H}_{\text{SB,I}}^{\text{RWA}}(t), \rho]$$

$$\mathcal{P}\rho = \operatorname{Tr}_B \rho \otimes |vac\rangle\langle vac|$$

Пример

Утверждение.

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1} \sigma_+ \otimes \rho_B = -G_I(t - t_1) \sigma_+ \otimes \rho_B,$$

где

$$\rho_B = |vac\rangle\langle vac|$$

$$G_I(t) = \int |g_k|^2 dk e^{-i(\omega_k - \Omega)t}$$

Кроме того,

$$\mathcal{P} \sigma_+ \otimes \rho_B = \sigma_+ \otimes \rho_B$$

Пример

$$\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -i[\hat{H}_{\mathrm{SB,I}}^{\mathrm{RWA}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] =$$

$$= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk$$

Пример

$$\mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) = -i[\hat{H}^{\text{RWA}}_{\text{SB,I}}(t_1), \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac|] =$$

$$= -i \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk$$

$$\mathcal{L}_t \mathcal{L}_{t_1}(\sigma_+ \otimes \rho_B) =$$

$$= -\left[\hat{H}^{\text{RWA}}_{\text{SB,I}}(t), \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_- \sigma_+ \otimes b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk\right] =$$

$$= -\int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \sigma_- \sigma_+ \otimes b_{k'} b_k^\dagger |vac\rangle\langle vac| dk dk' =$$

$$= -\int g_{k'} e^{-i(\omega_{k'} - \Omega)t} \int e^{i(\omega_k - \Omega)t_1} g_k^* \sigma_+ \otimes \delta(k - k') |vac\rangle\langle vac| dk dk' =$$

$$= -\int dk e^{-i(\omega_k - \Omega)(t - t_1)} |g_k|^2 \sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| =$$

$$= -G_I(t - t_1)\sigma_+ \otimes |vac\rangle\langle vac| \quad \square$$

Пример

$$
\begin{gathered}
(\mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \\
- \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{P}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{P})\sigma_+ \otimes \rho_B = \\
= -(\mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_2}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_3} + \mathcal{L}_t\mathcal{L}_{t_3}\mathcal{L}_{t_1}\mathcal{L}_{t_2})\sigma_+ \otimes \rho_B = \\
= -(G_I(t - t_2)G_I(t_1 - t_3) + G_I(t - t_3)G_I(t_1 - t_2))\sigma_+ \otimes \rho_B
\end{gathered}
$$