О нётеровости по уравнениям в дистрибутиынх решётках

Ю. С. Дворжецкий

Омский Государственный Университет им. Ф. М. Достоевского

15 марта 2012 г.

Содержание

Определения

Решётка

Решёточный язык: $\mathcal{L}_0 = \{\vee^{(2)}, \wedge^{(2)}\}$.

Определение (Решётка)

Решётка $\mathcal{A} = \langle A; \vee, \wedge \rangle$ *- это система, в которой верны:*

1. *Идемпотентность:* $a \wedge a = a$, $a \vee a = a$.
2. *Коммутативность:* $a \wedge b = b \wedge a$, $a \vee b = b \vee a$.
3. *Ассоциативность:* $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$, $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$.
4. *Законы поглощения:* $a \wedge (a \vee b) = a$, $a \vee (a \wedge b) = a$.

На любой решётке можно ввести частичный порядок, положив:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

Любое частично упорядоченное множество порождает решётку:

$$a \vee b = \sup\{a, b\},$$

$$a \wedge b = \inf\{a, b\}.$$

Дистрибутивные решётки

Определение (Дистрибутивная решётка)

Решётку $\mathcal{A} = \langle A; \vee, \wedge \rangle$ *мы будем называть* ***дистрибутивной****, если для любых элементов* $a, b, c \in A$ *выполнено:*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Пример

Система $\mathcal{B} = \langle Z; \wedge = \min, \vee = \max, \ldots, -1, 0, 1, \ldots \rangle$ *является решёткой.*

Расширим язык $\mathcal{L}_0$ до языка $\mathcal{L}$, добавив бесконечное множество констант:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{c_i | i \in I\}.$$

Определение (Дистрибутивная $\mathcal{C}$-решётка)

*Дистрибутивную решётку $\mathcal{A}$ расширенного языка $\mathcal{L}$ мы будем называть **дистрибутивной $\mathcal{C}$-решёткой**, где $\mathcal{C}$ - дистрибутивная решётка, порождённая константами $\{c_i | i \in I\}$.*

Определение (Уравнение)

Атомарные формулы языка $\mathcal{L}$ от переменных $\overline{x}$ мы будем называть уравнениями языка $\mathcal{L}$ от переменных $\overline{x}$.

Замечание

На любой решётке можно ввести частичный порядок атомарной формулой:

$$a \leq b \Leftrightarrow a \wedge b = a,$$

следовательно, нестрогие неравенства тоже можно считать уравнениями, положив:

$$t(\overline{x}) \leq s(\overline{x}) \Leftrightarrow t(\overline{x}) \wedge s(\overline{x}) = t(\overline{x}),$$

где $s(\overline{x})$ и $t(\overline{x})$ — термы языка $\mathcal{L}$ от переменных $\overline{x}$.

Определение (Система уравнений)

Системой уравнений от переменных $\overline{x}$ будем называть любое множество уравнений от переменных $\overline{x}$.

Определение (Эквивалентные системы уравнений)

Две системы уравнений $P(\overline{x})$ и $Q(\overline{x})$ от переменных $\overline{x}$ будем называть *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Определение (Нётеровость по уравнениям)

$\mathcal{L}$-алгебру $\mathcal{A}$ будем называть нётеровой по уравнениям, если для любой системы уравнений $S(\overline{x})$ от переменных $\overline{x}$ существует эквивалентная её конечная подсистема уравнений $S_0(\overline{x}) \subseteq S(\overline{x})$.

Определение (Слабая нётеровость по уравнениям)

$\mathcal{L}$-алгебру $\mathcal{A}$ будем называть слабо нётеровой по уравнениям, если для любой системы уравнений $S(\overline{x})$ от переменных $\overline{x}$, существует эевивалентная конечная система уравнений $S_0(\overline{x})$.

Любая нётеровая по уравнениям система является слабо нётеровой по уравнениям.

Преобразование систем уравнений

Теорема (Шевляков)

В булевой решётке $\mathcal{C}$-решётке любая система уравнений эквивалентна системе, состоящей из уравнений вида: $x_{i_1}^{a_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k}^{a_k} \leq c$, где $c \in \mathcal{C}$.

Теорема

В дистрибутивной $\mathcal{C}$-решётке любая система уравнений эквивалентна системе, состоящей из уравнений вида:

$$(x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m} \wedge c) \leq (x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_l} \vee d)\,,$$

где:

1. *в каждой части уравнения символы переменных не повторяются,*
2. *одна и та же переменная не может быть и в левой, и правой частях,*
3. *в каждой части уравнения не более одного константного символа*
4. *если в каждой части по константному символу, то либо $c > d$, либо c и d несравнимы.*

Любой терм языка $\mathcal{L}$ от переменных $\overline{x} = (x_1, \ldots x_n)$ можно записать в любой из следующих форм:

1. Конъюнктивная нормальная форма (КНФ):

$$(a_{1,1} \vee \ldots \vee a_{1,n_1}) \wedge \ldots \wedge (a_{k,1} \vee \ldots \vee a_{k,n_k})$$

2. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ):

$$(a_{1,1} \wedge \ldots \wedge a_{1,n_1}) \vee \ldots \vee (a_{k,1} \wedge \ldots \wedge a_{k,n_k})$$

где $a_{i,j}$ либо символ одной из переменных $\overline{x}$, либо константный символ языка $\mathcal{L}$, причём интерпретация этого терма в системе $\mathcal{A}$ не изменится.

Запишем все уравнения в виде системы неравенств:

$$a = b \quad \sim \quad \begin{cases} a \leq b, \\ b \leq a. \end{cases}$$

Запишем левую часть каждого уравнения в ДНФ:

$$a \leq b \quad \sim \quad a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k \leq b,$$

здесь a_i — конъюнкты.

Запишем левую часть каждого уравнения в ДНФ:

$$a \leq b \quad \sim \quad a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k \leq b,$$

здесь a_i — конъюнкты.

Запишем в виде эквивалентной системы более простых неравенств:

$$a_1 \vee a_2 \vee \ldots \vee a_k \leq b \quad \sim \quad \begin{cases} a_1 \leq b, \\ a_2 \leq b, \\ \vdots \\ a_k \leq b. \end{cases}$$

здесь a_i — конъюнкты.

Запишем правую часть каждого уравнения в КНФ:

$$a \leq b \quad \sim \quad a \leq b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$$

здесь a_i — дизъюнкты.

Запишем правую часть каждого уравнения в КНФ:

$$a \leq b \quad \sim \quad a \leq b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k$$

здесь a_i — дизъюнкты.

Запишем в виде эквивалентной системы более простых неравенств:

$$a \leq b_1 \wedge b_2 \wedge \ldots \wedge b_k \quad \sim \quad \begin{cases} a \leq b_1, \\ a \leq b_2, \\ \vdots \\ a \leq b_k. \end{cases}$$

здесь a_i — дизъюнкты.

Таким образом любую систему можно эквивалентным образом переписать в систему, состоящей из уравнений вида:

$$(a_1 \wedge a_2 \wedge \ldots \wedge a_k) \leq (b_1 \vee b_2 \vee \ldots \vee b_m)\,,$$

где a_i, b_j — либо символ одной из переменных $\overline{x}$, либо константный символ языка $\mathcal{L}$.

В дистрибутивной $\mathcal{C}$-решётке любая система уравнений эквивалентна системе, состоящей из уравнений вида:

$$(x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_m} \wedge c) \leq (x_{j_1} \vee \ldots \vee x_{j_l} \vee d)\,,$$

где:

1. в каждой части уравнения символы переменных не повторяются,
2. одна и та же переменная не может быть и в левой, и правой частях,
3. в каждой части уравнения не более одного константного символа
4. если в каждой части по константному символу, то либо $c > d$, либо c и d несравнимы.

Следствие

Если решётка констант $\mathcal{C}$ конечна, то и число не эквивалентных уравнений тоже конечно.

Следствие

Если решётка констант $\mathcal{C}$ конечна, то и число не эквивалентных уравнений тоже конечно.

Следствие

Если дистрибутивная решётка $\mathcal{C}$ конечна, то любая дистрибутивная $\mathcal{C}$-решётка нётерова по уравнениям.

Нётеровость по уравнениям

Теорема (Шевляков)

Булева $\mathcal{C}$-решётка $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда булева решётка $\mathcal{C}$, порождённая константами, конечна.

Теорема (Шевляков)

Булева $\mathcal{C}$-решётка $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда булева решётка $\mathcal{C}$, порождённая константами, конечна.

Теорема

Дистрибутивная $\mathcal{C}$-решётка $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям, тогда и только тогда, когда дистрибутивная решётка $\mathcal{C}$, порождённая константами, конечна.

ACC и DCC

Определение (Цепь, антицепь)

Любое линейно упорядоченное подмножество элементов решётки мы будем называть цепью. Антицепью мы будем называть подмножество элементов решётки, в которой любые два элемента несравнимы.

Определение (ACC, DCC)

Будем говорить, что решётка удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепей (ACC), если в решётке не существует бесконечных строго возрастающих цепей элементов.
Будем говорить, что решётка удовлетворяет условию обрыва убывающих цепей (DCC), если в решётке не существует бесконечных строго убывающих цепей элементов.

Теорема

Если $\mathcal{C}$-решётка $\mathcal{A}$ нётерова по уравнениям, то в $\mathcal{C}$ выполнены ACC и DCC.

Теорема

Если дистрибутивная $\mathcal{C}$-решётка $\mathcal{A}$ нётерова по уравненям, то в $\mathcal{C}$ обрываются и все антицепи, и, следовательно, $\mathcal{C}$ конечна.

Слабая нётеровость по уравнениям

Теорема (Шевляков)

Булева $\mathcal{C}$-решётка $\mathcal{A}$ слабо нётерова по уравнениям, тогда и только тогда, когда решётка $\mathcal{C}$ порождённая константами полна в $\mathcal{A}$, т.е. для любого множества констант из $\mathcal{C}$ существуют точная верхняя и нижняя грани в $\mathcal{A}$ и эти грани принаждлежат $\mathcal{C}$.

Пример

Дистрибутивная решётка

$$\mathcal{M} = \left\langle [0,1]\,; \vee = \max^{(2)}, \wedge = \min^{(2)}, [0,1] \right\rangle,$$

с 0 и 1 не является слабо нётеровой по уравнениям, но решётка, порождённая константами.

Также в этой системе верны законы бесконечной дистрибутивности MID и JID, и, следовательно, решётка $\mathcal{M}$ является решёткой с псевдодополнениями.

Следующая система в $\mathcal{M}$ не эквивалентна никакой конечной системе.

$$S(x,y) = \left\{ x \wedge \frac{2}{3^n} \leq y \vee \frac{1}{3^n} \,|\, n = 1, 2, \dots \right\}.$$

Любое уравнение в $\mathcal{M}$ от одной переменой эквивалентно системе уравнений, состоящей из уравнений вида $x \leq b$ и $a \leq x$.
Множество следующих уравнений от двуз переменных можно представить в виде:

1. $$x \wedge a \leq y \vee b \sim \left[\begin{array}{l} x \leq y \\ x \leq b \\ a \leq y \end{array}\right. ,$$

2. $$y \wedge a \leq x \vee b \sim \left[\begin{array}{l} y \leq x \\ y \leq b \\ a \leq x \end{array}\right. .$$

все уравнения системы $S'(x,y)$ в одном из следующих видов:

1. $x \le b$, где $b < 1$,
2. $a \le x$, где $a > 0$,
3. $y \le b$, где $b < 1$,
4. $a \le y$, где $a > 0$,
5. $x \wedge a \le y \vee b$, где $a > b$,
6. $y \wedge a \le x \vee b$, где $a > b$.

Заметим, что решениями исходной системы $S(x,y)$ являются точки $(0,0)$ и $(1,1)$, следовательно, уравнений вида 1, 2, 3 и 4 в эквивалентной системе $S'(x,y)$ быть не может.
Множеству решений $S(x,y)$ принадлежит точка $(0,1)$, следовательно, уравнений вида $y \wedge a \le x \vee b$, где $a > b$, быть не может.

Таким образом, система $S'(x,y)$ состоит из конечного числа уравнений вида $x \wedge a \leq y \vee b$, где $a > b$. Множеству решений исходной системы S принадлежит следующая бесконечная последовательность точек:

$$\left(\frac{3}{3^n}, \frac{2}{3^n}\right), \; n = 1, 2, \ldots,$$

и не принадлежит последовательность

$$\left(\frac{2}{3^n}, \frac{1}{3^n}\right), \; n = 1, 2, \ldots.$$

Нетрудно увидеть, что конечного числа уравнений в S' не достаточно, чтобы одна последовательность точек принадлежала множеству решений, а другая — нет.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ !!!