Точная асимптотика фундаментальных решений начально-краевых задач для нестрого параболических уравнений с малым параметром.

Рахель М.А., Данилов В.Г.

МИЭМ НИУ ВШЭ

В докладе будут рассказаны методы построения асимптотики фундаментального решения вырождающегося параболического уравнения с малым параметром

$$\begin{gathered}\varepsilon\frac{\partial G}{\partial t}-\varepsilon^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x^\alpha a(x)\frac{\partial G}{\partial x}\right)=0,\ x\geq 0,\ t>0;\\ G|_{t=0,\ x>0}=\delta(x-\xi),\end{gathered}\tag{1}$$

где $0<a(x)<M$ – гладкая функция. Будут рассмотрены два случая: $\alpha=1$ и $\alpha=2$.

При $\alpha=2$ доказывается, что асимптотика фундаментального решения может быть представлена в виде равномерно сходящегося ряда

$$G(x,\xi,t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\varepsilon^k G_k(x,\xi,t),\tag{1}$$

слагаемые которого вычисляются по формуле

$$G_k(x,\xi,t)=\int_0^t\int_0^{+\infty}G_0(x,y,t-\tau)F(y)G_{k-1}(y,\xi,\tau)dyd\tau.\tag{2}$$

Здесь

$$G_0(x,\xi,t)=e^{-\frac{S(x,\xi,t)}{\varepsilon}}\varphi(x,\xi,t)\tag{3}$$

– главный член асимптотики, имеющий вид ВКБ, а $F(x)$ – гладкая равномерно ограниченная при $x \geq 0$ функция.

С помощью функции G можно построить решение неоднородного уравнения с начальным условием $u|_{t=0} = u_0(x)$ и краевым условием $u|_{x=0} = 0$, если $u_0(0) = 0$.

При $\alpha = 1$ оказалось, что асимптотика фундаментального решения не может быть построена в виде ВКБ равномерно по $x \geq 0$, а решение "в главном" имеет вид

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{\varepsilon t} e^{-\frac{S_1(x,\xi,t)}{\varepsilon}} I_0 \left(\frac{S_2(x, \xi, t)}{\varepsilon} \right), \tag{4}$$

где $I_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода. В частности, при $a(x) \equiv 1$:

$$S_1 = \frac{x + \xi}{t},\ S_2 = \frac{2\sqrt{x\xi}}{t}. \tag{5}$$

В теории асимптотических методов функции S_i/ε называются быстрыми переменными, а S_i – фазами. Такая структура, когда быстрые переменные входят по одной в каждое слагаемое, нетипична для решений линейных уравнений. Обычно в линейных задачах (метод ВКБ) многофазные решения имеют вид $\sum \varphi_i e^{-S_i/\varepsilon}$, т.е. вид конечной суммы однофазных решений. Структура решения (4), с другой стороны, типична для решений нелинейных уравнений, описывающих взаимодействие нелинейных волн.

При $a(x) \neq 1$ решение уточняется по теории возмущений, аналогичной теории Лангера.

Обоснование асимптотики происходит аналогичным образом: с помощью сверток строится формальный ряд и доказывается его сходимость.