Основы теории открытых квантовых систем II. Лекция 13. Уравнение Ху-Паза-Занга. Модель спин-бозона без приближения вращающейся волны

Теретёнков Александр Евгеньевич

28 апреля 2025 г.

В прошлой лекции...

Гильбертово пространство

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$$

Коммутационные соотношения

$$[x,p] = i, \qquad [b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$$

Гамилтониан

$$H = H_S + H_B + H_I$$

$$H_S = \frac{p^2}{2m} + V(x), \qquad H_B = \int dk \omega_k b_k^\dagger b_k,$$

$$H_I = -xB, \qquad B = \int dk g_k (b_k + b_k^\dagger), \qquad g_k \in \mathbb{R}$$

В прошлой лекции...

Утверждение. Пусть

$$B(t) \equiv e^{iH_B t} B e^{-iH_B t} = \int dk g_k (e^{-i\omega_k t} b_k + e^{i\omega_k t} b_k^\dagger)$$

— свободная эволюция B, а

$$x(t) \equiv e^{iHt} x e^{-iHt}$$

— гейзенбергоская эволюцию коориднаты x, тогда

$$m\ddot{x}(t) + V'(x(t)) - \int_0^t D(t-s)x(s) = B(t),$$

где

$$D(t) = 2 \int dk g_k^2 \sin \omega_k t$$

Доказательство. Уравнения Гейзенберг

$$\dot{p}(t) = i[H, p(t)] = -V'(x(t)) + \int dk g_k (b_k(t) + b_k^\dagger(t))$$

$$\dot{x}(t) = i[H, x(t)] = \frac{p(t)}{m}$$

$$\dot{b}_k(t) = i[H, b_k(t)] = -i\omega_k b_k(t) + i g_k x(t)$$

$$b_k(t) = e^{-i\omega_k t} b_k + i g_k \int_0^t e^{-i\omega_k (t-s)} x(s)$$

Модель Калдейры-Легетта

$$\int dk g_k (b_k(t) + b_k^\dagger(t)) = \int dk g_k (e^{-i\omega_k t} b_k + e^{i\omega_k t} b_k^\dagger) +$$

$$+ i \int dk g_k^2 \int_0^t (e^{-i\omega_k (t-s)} - e^{i\omega_k (t-s)}) x(s) =$$

$$= B(t) + \int_0^t \underbrace{2 \int dk g_k^2 \sin \omega_k (t-s)}_{D(t-s)} x(s)$$

Модель Калдейры-Легетта

Упражнение. $-i[B(t), B(s)] = D(t-s)$.

Упражнение. В равновесном случае, то есть при усреднении $\langle\cdot\rangle$ по равновесному состоянию $\rho_B = \frac{e^{-\beta H_B}}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H_B}}$

$$\langle\{B(t), B(s)\}\rangle = D_{\mathrm{th}}(t) \equiv 2\int dk g_k^2 \,\mathrm{cth}\, \frac{\beta\omega_k}{2} \cos\omega_k t$$

Модель Калдейры-Легетта

Также как и для спин-бозона можно ввести спектральную плотность

$$J(\omega) = \int dk g_k^2 \delta(\omega - \omega_k), \qquad \omega_k > 0$$

$$D(t) = 2\int_0^{\infty} d\omega J(\omega) \sin \omega t$$

$$D_{\text{th}}(t) = 2\int_0^{\infty} d\omega \, \text{cth} \, \frac{\beta\omega}{2} \cos \omega t J(\omega)$$

Модель Калдейры-Легетта

В случае квадратичного потенциала $V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$, имеем

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) - \int_0^t D(t-s)x(s) = B(t),$$

В этом случае уже исходный гамильтониан является бесконечно-мерным обобщением унитарной динамики с квадратичным гамильтонианом, рассмотренной ранее. В частности, если начальное состояние системы и резервуара — гауссовское, то оно сохраняется в процессе эволюции, кроме того, редуцированная динамика — также гауссовская.

Модель Калдейры-Легетта

Утверждение. Пусть $X_{1,2}(t)$ — решения (скалярного) уравнения

$$m\ddot{X}(t) + m\omega_0^2 X(t) - \int_0^t ds D(t-s) X(s) = 0$$

с начальным условием $X_1(0) = 1$, $\dot{X}_1(0) = 0$ и $X_2(0) = 0$, $\dot{X}_2(0) = 1$, тогда

$$x(t) = X_1(t)x(0) + X_2(t)\dot{x}(0) + \frac{1}{m}\int_0^t ds X_2(t-s) B(s).$$

Модель Калдейры-Легетта

Доказательство. Преобразование Лапласа $\tilde{x}(p) = \int_0^\infty dte^{-pt}x(t)$ уравнения

$$m\ddot{x}(t) + m\omega_0^2 x(t) - \int_0^t dsD(t-s)x(s) = B(t)$$

имеет вид

$$m(p^2\tilde{x}(p) - px(0) - \dot{x}(0)) + m\omega_0^2\tilde{x}(p) - \tilde{D}(p)\tilde{x}(p) = \tilde{B}(p),$$

тогда

$$\tilde{x}(p) = \frac{1}{m(p^2+\omega_0^2) - \tilde{D}(p)}(\tilde{B}(p) + m\dot{x}(0) + mpx(0))$$

Модель Калдейры-Легетта

При $\tilde{B}(p)$ с соответствующими начальными условиями, имеем

$$\tilde{X}_1(p) = \frac{m}{m(p^2+\omega_0^2) - \tilde{D}(p)} p$$

$$\tilde{X}_2(p) = \frac{m}{m(p^2+\omega_0^2) - \tilde{D}(p)}$$

тогда

$$\tilde{x}(p) = \tilde{X}_1(p)x(0) + \tilde{X}_2(p)\dot{x}(0) + \frac{1}{m}\tilde{X}_2(p)\tilde{B}(p)$$

После обратного преобразования получаем требуемое. □

Модель Калдейры-Легетта

$$x(t) = X_1(t)x(0) + X_2(t)\dot{x}(0) + \frac{1}{m}\int_0^t ds X_2(t-s)B(s)$$

В случае $\langle B(t)\rangle = 0$ (в частности, в случае равновесного резервуара)

$$\langle x(t)\rangle = X_1(t)\langle x(0)\rangle + X_2(t)\langle \dot{x}(0)\rangle$$

$$x(t) - \langle x(t)\rangle = X_1(t)(x(0) - \langle x(0)\rangle) + X_2(t)(\dot{x}(0) - \langle \dot{x}(0)\rangle) + \\ + \frac{1}{m}\int_0^t ds X_2(t-s)B(s)$$

Модель Калдейры-Легетта

Пусть в начальные момент времени система и резервуар некоррелированы, тогда

$$
\begin{gathered}
\langle (x(t) - \langle x(t) \rangle)^2 \rangle = \\
= (X_1(t))^2 \langle (x(0) - \langle x(0) \rangle)^2 \rangle + X_2(t) \langle (\dot{x}(0) - \langle \dot{x}(0) \rangle)^2 \rangle + \\
+ X_1(t) X_2(t) \langle \{ x(0) - \langle x(0) \rangle, \dot{x}(0) - \langle \dot{x}(0) \rangle \} \rangle + \\
+ \frac{1}{m^2} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 X_2(t - s_1) X_2(t - s_2) \langle B(s_1) B(s_2) \rangle,
\end{gathered}
$$

где $\langle B(s_1) B(s_2) \rangle$ определяется $D(t)$ и $D_{\mathrm{th}}(t)$ в случае равновесного резервуара.

Модель Калдейры-Легетта

Упражнение. Вычислить $\langle (\dot{x}(t) - \langle \dot{x}(t) \rangle)^2 \rangle$ и $\langle \{ x(t) - \langle x(t) \rangle, \dot{x}(t) - \langle \dot{x}(t) \rangle \} \rangle$

Замечание. Это однозначно задаёт динамику гауссовской редуцированное матрицы плотности системы.

Уравнение Ху-Паза-Занга

В случае факторизованных начальных состояний можно получить точные уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\rho_S(t) = &- i\left[\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}(m\omega_0^2 + \Delta(t))x^2, \rho_S(t)\right] - \\ &- i\gamma(t)[x, \{p, \rho_S(t)\}] - D_{pp}(t)[x, [x, \rho_S(t)]] + \\ &+ 2D_{xp}(t)[x, [p, \rho_S(t)]]\end{aligned}$$

Уравнение Ху-Паза-Занга

Уравнения второго порядка

$$\Delta^{(2)}(t) = -\int_0^t D(s)\cos(\omega_0 s)ds$$

$$\gamma^{(2)}(t) = \frac{1}{2m\omega_0}\int_0^t D(s)\sin(\omega_0 s)ds$$

$$D_{pp}^{(2)}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t D_{\mathrm{th}}(s)\cos(\omega_0 s)ds$$

$$D_{xp}^{(2)}(t) = \frac{1}{4\omega_0}\int_0^t D_{\mathrm{th}}(s)\sin(\omega_0 s)ds$$

(Лэмбовский сдвиг и коэффициент затухания не зависят от температуры).

Модель спин-бозона (без RWA)

Гильбертово пространство

$$\mathbb{C}^2 \otimes \mathfrak{F}_b(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}))$$

Коммутационные соотношения

$$[b_k, b_{k'}^\dagger] = \delta(k - k')$$

Гамилтониан

$$H = H_S + H_B + H_I$$

$$H_S = \frac{1}{2}\omega_0 \sigma_z, \qquad H_B = \int dk \omega_k b_k^\dagger b_k,$$

$$H_I = -\frac{1}{2}\sigma_x B, \qquad B = \int dk g_k (b_k + b_k^\dagger), \qquad g_k \in \mathbb{R}$$

Модель спин-бозона (без RWA)

Уравнение Блоха в представлении Шредингера

$$\frac{d}{dt}\vec{v} = G(t)\vec{v} + \vec{b}$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_0 & 0 \\ \omega_0 + g_{yx}(t) & g(t) & 0 \\ 0 & 0 & g(t) \end{pmatrix}, \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_z(t) \end{pmatrix}$$

$$g_{yx}(t) = \frac{1}{2}\int_0^t D_{\mathrm{th}}(s)\sin(\omega_0 s)ds$$

$$g(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t D_{\mathrm{th}}(s)\cos(\omega_0 s)ds$$

$$b_z(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t D(s)\sin(\omega_0 s)ds$$

Зависящий от времени гамильтониан

Введём преобразование Фурье корреляционных функций резервуара

$$\gamma_{ij}(\omega, t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} ds e^{i\omega s} \langle B_i(t) B_j(t-s) \rangle$$

и

$$\eta_{ij}(\omega, t) \equiv \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\gamma_{ij}(\omega', t)}{\omega' - \omega} \frac{d\omega'}{2\pi}.$$

Кроме того, разложим

$$S_j = \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_S, \,\cdot\,]} \tilde{S}_{j,m}(\omega), \qquad [H_S, \tilde{S}_j(\omega)] = \omega \tilde{S}_j(\omega).$$

Зависящий от времени гамильтониан

Утверждение

При $\lambda \to 0$ *и* $t = O(\lambda^{-2})$,

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i[H_S + \lambda^2 H_{LS}(t), \rho_S(t)] + \lambda^2 \mathcal{D}_t(\rho_S(t)) + o(\lambda^2),$$

где

$$H_{LS}(t) = \sum_{ij} \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_F, \,\cdot\,]} \eta_{ij}(\omega, t) \tilde{S}_i^\dagger(\omega) \tilde{S}_j(\omega)$$

— гамильтониан лэмбовского сдвига, а

$$\mathcal{D}_t(\rho_S) = \sum_{ij} \sum_{\omega \in \mathrm{spec}[H_S, \,\cdot\,]} \gamma_{ij}(\omega, t) \left(\tilde{S}_j(\omega) \rho_S \tilde{S}_i^\dagger(\omega) - \frac{1}{2} \left\{ \tilde{S}_i^\dagger(\omega) \tilde{S}_j(\omega), \rho_S \right\} \right)$$

— дисспатор.

Зависящий от времени гамильтониан

- Чтобы зависимость от времени "выжила" необходимо вводить малый параметр в корреляционные функции вида $\gamma_{ij}(\omega, t) = \tilde{\gamma}_{ij}(\omega, \lambda^2 t)$, $\eta_{ij}(\omega, t) = \tilde{\eta}_{ij}(\omega, \lambda^2 t)$.
- Переопределение

$$H_S'(t) = H_S + \lambda \sum_j S_j \langle B_j(t) \rangle$$

можно сделать и в ситуации когда $\lambda \langle B_j(t)\rangle$ не мало (можно считать, что $\langle B_j(t)\rangle \sim \lambda^{-1}$), но $\lambda^2 \langle B_i'(t) B_j'(t-s)\rangle$ — мало. Это и приводит к зависящим от времени гамильтонианам общего вида.