Омский Алгебраический Семинар

Заседание №834

РАНГИ ПЛАНАРНОСТИ МНОГООБРАЗИЙ КОММУТАТИВНЫХ МОНОИДОВ

Д. В. Соломатин

22.03.12

Определение. Будем говорить, что *многообразие* V *полугрупп имеет ранг планарности* r, где r – натуральное число, если все V-свободные полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарный граф Кэли, а V-свободная полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли. Если для многообразия V такого натурально числа r не существует, то будем говорить, что многообразие V полугрупп имеет бесконечный ранг планарности.

(Л.М.Мартынов)

Определение. Будем говорить, что *многообразие V полугрупп имеет ранг планарности r*, где r – натуральное число, если все V-свободные полугруппы ранга $\leq r$ допускают планарный граф Кэли, а V-свободная полугруппа ранга $r+1$ уже не допускает планарный граф Кэли. Если для многообразия V такого натурально числа r не существует, то будем говорить, что многообразие V полугрупп имеет бесконечный ранг планарности.

(Л.М.Мартынов)

Определение. Графом Кэли полугруппы S относительно множества образующих её элементов X, называют помеченный ориентированный мультиграф $Cay(S, X)$, состоящий из множества вершин S и множества помеченных дуг – всевозможных троек (a, x, b), где $a, b \in S$, $x \in X$ и $ax = b$.

(*Zelinka B.* Graphs of Semigroups // Casopis. Pest. Mat, 1981. Vol. 106. – P. 407-408.)

Head T.J. The varieties of commutative monoids // Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XVI 203-206 (1968):

Теорема 1. *Каждое многообразие* $\boldsymbol{V}$ *коммутативных моноидов содержит циклический моноид* C *наибольшего порядка и* $\boldsymbol{V}$ *состоит из гомоморфных образов прямых степеней* C.

Head T.J. The varieties of commutative monoids // Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XVI 203-206 (1968):

Теорема 1. *Каждое многообразие* $\mathbf{V}$ *коммутативных моноидов содержит циклический моноид* C *наибольшего порядка и* $\mathbf{V}$ *состоит из гомоморфных образов прямых степеней* C.

Пусть $\mathbf{M}$ – многообразие всех коммутативных моноидов. Множество всех подмногообразий многообразия $\mathbf{M}$ по отношению включения образует решетку $L(\mathbf{M})$. Конструируется решетка L, изоморфная решетке $L(\mathbf{M})$.

Head T.J. The varieties of commutative monoids // Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XVI 203-206 (1968):

Теорема 1. *Каждое многообразие* **V** *коммутативных моноидов содержит циклический моноид C наибольшего порядка и* **V** *состоит из гомоморфных образов прямых степеней C*.

Пусть **M** – многообразие всех коммутативных моноидов. Множество всех подмногообразий многообразия **M** по отношению включения образует решетку L(**M**). Конструируется решетка L, изоморфная решетке L(**M**).

Пусть L' – прямое произведение решеток G×I×P, где G – двухэлементное множество $\{1, 2\}$ с естественным порядком на нём; I – пополненное элементом ∞ множество натуральных чисел с естественным порядком на нём; P – пополненное элементом ∞ множество натуральных чисел упорядоченное отношением делимости (при этом, каждое натуральное число делит ∞).

Head T.J. The varieties of commutative monoids // Nieuw Archief voor Wiskunde (3), XVI 203-206 (1968):

Теорема 1. *Каждое многообразие* $\mathbf{V}$ *коммутативных моноидов содержит циклический моноид* C *наибольшего порядка и* $\mathbf{V}$ *состоит из гомоморфных образов прямых степеней* C.

Пусть $\mathbf{M}$ – многообразие всех коммутативных моноидов. Множество всех подмногообразий многообразия $\mathbf{M}$ по отношению включения образует решетку $L(\mathbf{M})$. Конструируется решетка L, изоморфная решетке $L(\mathbf{M})$.

Пусть L' – прямое произведение решеток G×I×P, где G – двухэлементное множество $\{1, 2\}$ с естественным порядком на нём; I – пополненное элементом ∞ множество натуральных чисел с естественным порядком на нём; P – пополненное элементом ∞ множество натуральных чисел упорядоченное отношением делимости (при этом, каждое натуральное число делит ∞).

Каждому многообразию $\mathbf{V} \in L(\mathbf{M})$ поставлен в соответствие элемент $\varphi(\mathbf{V}) \in L'$ следующим образом: выбирается циклический моноид C наибольшего порядка в $\mathbf{V}$; если C – бесконечен, то полагают $\varphi(\mathbf{V}) = (2, \infty, \infty)$; если же C – конечен, то выбирают порождающий его элемент g и полагают $\varphi(\mathbf{V}) = (d, i, p)$, где d принимает значение 1 или 2 в зависимости от того, является ли C группой или нет, а i и p это индекс и период элемента g соответственно. По теореме 1, отображение φ является взаимно-однозначным отображением $L(\mathbf{M})$ в L'.

Пусть $L = \{(x, y, z) \in L' \mid (y = \infty \leftrightarrow z = \infty) \wedge (x = 1 \to y = 1)\}$.

Пусть $L = \{(x, y, z) \in L' \mid (y = \infty \leftrightarrow z = \infty) \wedge (x = 1 \to y = 1)\}$.

Тогда L оказывается подрешеткой решетки L' и $\mathrm{im}(\varphi) = L$. Таким образом, оказывается верна следующая

Пусть $L = \{(x, y, z) \in L' \mid (y = \infty \leftrightarrow z = \infty) \wedge (x = 1 \to y = 1)\}$.

Тогда L оказывается подрешеткой решетки L' и $\mathrm{im}(\varphi) = L$. Таким образом, оказывается верна следующая

Теорема 2. *Решетка* $L(\mathbf{M})$ *всех многообразий коммутативных моноидов изоморфна решетке* L*, так как существует изоморфизм* $\varphi : L(\mathbf{M}) \to L$.

Пусть $L = \{(x, y, z) \in L' \mid (y = \infty \leftrightarrow z = \infty) \wedge (x = 1 \to y = 1)\}$.

Тогда L оказывается подрешеткой решетки L' и $\mathrm{im}(\varphi) = L$. Таким образом, оказывается верна следующая

Теорема 2. *Решетка* $L(\mathbf{M})$ *всех многообразий коммутативных моноидов изоморфна решетке* L*, так как существует изоморфизм* $\varphi : L(\mathbf{M}) \to L$.

Там же отмечается, что многообразия, которым отображение φ ставит в соответствие тройки $(1, 1, p)$, $(2, i, p)$ и $(2, \infty, \infty)$ являются многообразиями коммутативных моноидов, задаваемыми тождествами $x^p = 1$, $x^i = x^{i+p}$ и $x = x$ соответственно.

Пусть $L = \{(x, y, z) \in L' \mid (y = \infty \leftrightarrow z = \infty) \wedge (x = 1 \to y = 1)\}$.

Тогда L оказывается подрешеткой решетки L' и $\operatorname{im}(\varphi) = L$. Таким образом, оказывается верна следующая

Теорема 2. *Решетка* $L(\mathbf{M})$ *всех многообразий коммутативных моноидов изоморфна решетке* L*, так как существует изоморфизм* $\varphi : L(\mathbf{M}) \to L$.

Там же отмечается, что многообразия, которым отображение φ ставит в соответствие тройки $(1, 1, p)$, $(2, i, p)$ и $(2, \infty, \infty)$ являются многообразиями коммутативных моноидов, задаваемыми тождествами $x^p = 1$, $x^i = x^{i+p}$ и $x = x$ соответственно.

Схематично изобразим решетку L на рисунке 1:

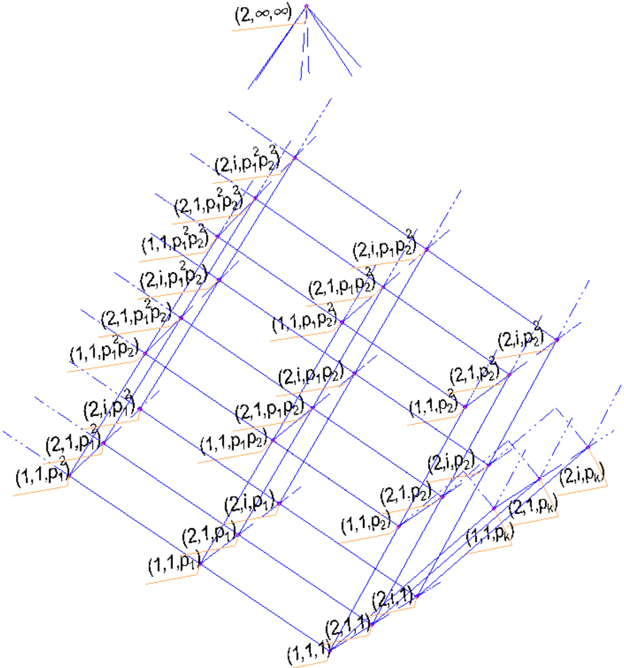

(2,∞,∞)
(2,i,p1²p2²)
(2,1,p1²p2²)
(1,1,p1²p2²)
(2,i,p1²p2)
(2,1,p1²p2)
(1,1,p1²p2)
(2,i,p1²)
(2,1,p1²)
(1,1,p1²)
(2,i,p1p2²)
(2,1,p1p2²)
(1,1,p1p2²)
(2,i,p1p2)
(2,1,p1p2)
(1,1,p1p2)
(2,i,p1)
(2,1,p1)
(1,1,p1)
(2,i,p2²)
(2,1,p2²)
(1,1,p2²)
(2,i,p2)
(2,1,p2)
(1,1,p2)
(2,i,pk)
(2,1,pk)
(1,1,pk)
(2,i,1)
(2,1,1)
(1,1,1)

Рис. 1. L

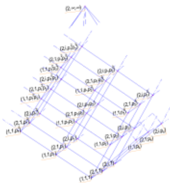
Пусть $L = \{(x, y, z) \in L' \mid (y = \infty \leftrightarrow z = \infty) \wedge (x = 1 \rightarrow y = 1)\}$.

Тогда L оказывается подрешеткой решетки L' и $\operatorname{im}(\varphi) = L$. Таким образом, оказывается верна следующая

Теорема 2. *Решетка* $L(\mathbf{M})$ *всех многообразий коммутативных моноидов изоморфна решетке* L, *так как существует изоморфизм* $\varphi : L(\mathbf{M}) \rightarrow L$.

Там же отмечается, что многообразия, которым отображение φ ставит в соответствие тройки $(1, 1, p)$, $(2, i, p)$ и $(2, \infty, \infty)$ являются многообразиями коммутативных моноидов, задаваемыми тождествами $x^p = 1$, $x^i = x^{i+p}$ и $x = x$ соответственно.

Схематично изобразим решетку L на рисунке 1:



Условимся в дальнейшем для системы Σ моноидных тождеств через $\operatorname{var} \Sigma$ обозначать многообразие коммутативных моноидов, заданное этой системой. Многообразие моноидов называется *комбинаторным*, если оно не имеет неединичных подгрупп.

Обозначения:

$\mathrm{A}_m = \mathrm{var}\{x^m = 1\}$ – многообразие всех абелевых групп экспоненты m;

$\mathbf{S}^1_{i,p} = \mathrm{var}\{x^{i+p} = x^i\}$ – комбинаторное многообразие коммутативных моноидов типа (i, p);

$\mathbf{M} = \mathrm{var}\{x = x\}$ – многообразие всех коммутативных моноидов.

Обозначения:

$\mathrm{A}_m = \mathrm{var}\{x^m = 1\}$ – многообразие всех абелевых групп экспоненты m;

$\mathbf{S}^1_{i,p} = \mathrm{var}\{x^{i+p} = x^i\}$ – комбинаторное многообразие коммутативных моноидов типа (i, p);

$\mathbf{M} = \mathrm{var}\{x = x\}$ – многообразие всех коммутативных моноидов.

Основным результатом является

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(V)$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$*, тогда* $r_\pi(V) \leq 3$*, более того*:

1) $r_\pi(V) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \neq 2$, $(i \geq 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(V) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{M}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \geq 2 \wedge i_2 \geq 1)$;

3) $r_\pi(V) = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Обозначения:

$A_m = \mathrm{var}\{x^m = 1\}$ – многообразие всех абелевых групп экспоненты m;

$\mathbf{S}^1_{i,p} = \mathrm{var}\{x^{i+p} = x^i\}$ – комбинаторное многообразие коммутативных моноидов типа (i, p);

$\mathbf{M} = \mathrm{var}\{x = x\}$ – многообразие всех коммутативных моноидов.

Основным результатом является

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\mathbf{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$*, тогда* $r_\pi(\mathbf{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \ne 2$, $(i \ge 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{M}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \ge 2 \wedge i_2 \ge 1)$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

$r_\pi(\mathbf{S}^1_{i,p})$	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	…
i=1	3	2	1	1	1	1
i=2	2	2	1	1	1	1
i=3	2	2	1	1	1	1
i=4	2	2	1	1	1	1
i=5	2	2	1	1	1	1
…	2	2	1	1	1	1

Доказательству теоремы предпошлём несколько доказанных нами ранее утверждений, которые мы сформулируем здесь в виде лемм.

Доказательству теоремы предпошлём несколько доказанных нами ранее утверждений, которые мы сформулируем здесь в виде лемм.

При рассмотрении графов Кэли моноидов необходимо помнить, что моноиды рассматриваются в сигнатуре $(\cdot,1)$ и поэтому единицу в образующие добавлять нет необходимости, она автоматически обязана присутствовать в любом подмоноиде.

Доказательству теоремы предпошлём несколько доказанных нами ранее утверждений, которые мы сформулируем здесь в виде лемм.

При рассмотрении графов Кэли моноидов необходимо помнить, что моноиды рассматриваются в сигнатуре $(\cdot, 1)$ и поэтому единицу в образующие добавлять нет необходимости, она автоматически обязана присутствовать в любом подмоноиде.

Напомним, что под циклическим моноидом понимается любой гомоморфный образ свободного моноида с одним образующим. Очевидно, что любой циклический моноид изоморфен либо циклической группе, либо получен из циклической полугруппы внешним присоединением единицы. Конечный моноид называется свободным коммутативным, если он является свободным коммутативным произведением циклических моноидов в классе моноидов.

Доказательству теоремы предпошлём несколько доказанных нами ранее утверждений, которые мы сформулируем здесь в виде лемм.

При рассмотрении графов Кэли моноидов необходимо помнить, что моноиды рассматриваются в сигнатуре $(\cdot, 1)$ и поэтому единицу в образующие добавлять нет необходимости, она автоматически обязана присутствовать в любом подмоноиде.

Напомним, что под циклическим моноидом понимается любой гомоморфный образ свободного моноида с одним образующим. Очевидно, что любой циклический моноид изоморфен либо циклической группе, либо получен из циклической полугруппы внешним присоединением единицы. Конечный моноид называется свободным коммутативным, если он является свободным коммутативным произведением циклических моноидов в классе моноидов.

Конечный свободный коммутативный моноидом имеет в классе всех коммутативных моноидов копредставление вида:

$$S = \left\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \;\middle|\; a_j^{m_j} = 1,\ a_i^{r_i + m_i} = a_i^{r_i}, i \in I,\ j \in J \right\rangle,$$

где $I \cup J = \overline{1, n}$, $I \cap J = \varnothing$, $J \neq \varnothing$. Заметим, что соотношение вида $a_j^{m_j} = 1$ эквивалентно соотношениям вида: $a_j^{1+m_j} = a_j$, $a_k a_j^{m_j} = a_k$ для любого индекса $k \in \overline{1, n}$. Граф Кэли будем рассматривать относительно множества образующих, указанных в копредставлении; понятно, что это множество является множеством свободных образующих моноида *S*.

Лемма 1. *Граф Кэли конечного свободного коммутативного моноида S относительно множества свободных образующих планарен тогда и только тогда, когда S задан копредставлением одного из следующих видов:*

1) $S = \left\langle a \;\middle|\; a^m = 1 \right\rangle$, где m – любое натуральное число;

2.1) $S = \left\langle a, b \;\middle|\; ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \right\rangle$, где для натуральных чисел r, m, t выполнено одно из следующих ограничений: а) $t \le 2$; б) $m \le 2$, $t > 2$;

2.2) $S = \left\langle a, b \;\middle|\; ab = ba, a^m = 1, b^t = 1 \right\rangle$, где m и t – натуральные числа, причем $t \le 2$;

3.1) $S = \left\langle a, b, c \;\middle|\; ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h, c^k = 1 \right\rangle$, где для натуральных чисел r, m, h, t, k выполнено одно из следующих ограничений: а) $h = 1$, $t = 1$, $k = 1$; б) $m \le 2$, $t \le 2$, $k = 1$; в) $m \le 2$, $h = 1$, $t = 1$, $k = 2$;

3.2) $S = \left\langle a, b, c \;\middle|\; ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = 1, c^2 = 1 \right\rangle$, где r и m – натуральные числа, причем $m \le 2$;

3.3) $S = \left\langle a, b, c \;\middle|\; ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 \right\rangle$;

4) $S = \langle a, b, c, d \mid ab = ba, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc,$ $a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c^2 = c, d = 1 \rangle$, где r и m – натуральные числа, причем $m \le 2$.

Опираясь на этот результат, получена:

Лемма 2. *Бесконечный моноид S, являющийся коммутативно-свободным произведением циклических моноидов в классе всех моноидов, имеет планарный граф Кэли относительно множества свободных образующих тогда и только тогда, когда S задан копредставлением одного из следующих видов:*

1) $S = \left\langle a, b \mid ab = ba, b^t = 1 \right\rangle$, где t – любое натуральное число;

2.1) $S = \left\langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, b^2 = b, c^k = 1 \right\rangle$ при $k \le 2$;

2.2) $S = \left\langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, c = 1 \right\rangle$;

2.3) $S = \left\langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, b^2 = 1, c^2 = 1 \right\rangle$;

3) $S = \langle a, b, c, d \mid ab = ba, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc,$
$b^2 = b, c^2 = c, d = 1 \rangle$.

Доказательство леммы 2. Рассмотрим каждую из возможных ситуаций. Для первого случая плоская укладка графа Кэли бесконечного моноида S получается аналогично изображенной на рис.2, располагая бесконечное число элементов вида $a^{i+1}b^j$, получаемых умножением на элемент a, левее элементов вида $a^i b^j$, где i – любое натуральное число, и $1 \le j \le t$. В частности, при $t = 1$ плоская укладка изображена на рис.3. Каждый из пунктов второго случая естественным образом обобщает возможные конечные плоские укладки из леммы 1, изображенные на рис.4 и рис.5. Действительно, условие 2.1 леммы 2 обобщает ограничения 3.1.а, 3.1.в леммы 1, условие 2.2 обобщает 3.1.б, и условие 2.3 обобщает 3.2 соответственно. В последнем случае полугруппа представляет собой коммутативно-свободное произведение бесконечной циклической полугруппы и двух циклических групп второго порядка с последующим внешним присоединением единицы. Планарная укладка соответствующего ей графа Кэли может быть получена продлением укладки, аналогичной изображенной на рис.4 с точностью до обозначения $d = c$. При невыполнении полученных ограничений, обнаруживаются подграфы соответствующих графов Кэли гомеоморфные графу K_5 или $K_{3,3}$. Причем совпадающие с подграфами, обнаруживаемыми в случае конечных моноидов из леммы 1.

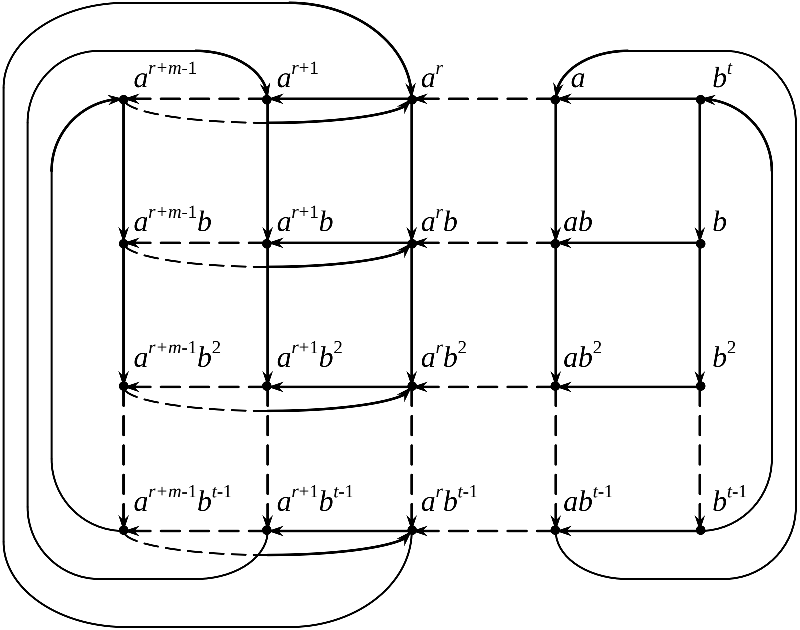


Рис. 2. Граф Кэли коммутативного моноида $S = \left\langle a, b \;\middle|\; a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \right\rangle$

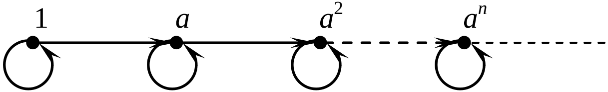


Рис. 3. Граф Кэли бесконечного циклического моноида

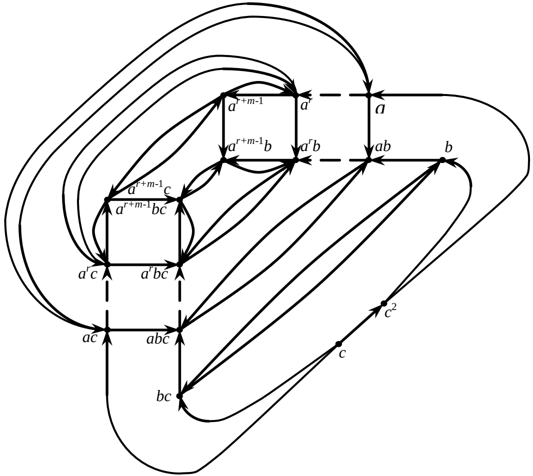


Рис. 4. Граф Кэли коммутативного моноида

$$S = \left\langle a, b, c \,\middle|\, ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c^2 = 1 \right\rangle$$

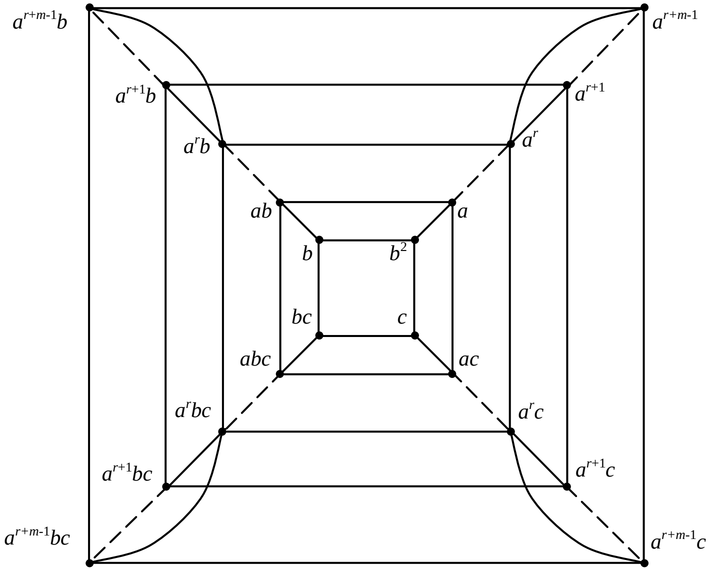


Рис. 5. Основа графа Кэли коммутативного моноида

$$S = \left\langle a, b, c \,\middle|\, ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^2 = 1, c^2 = 1 \right\rangle$$

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\boldsymbol{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* **V***, тогда* $r_\pi(\boldsymbol{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \ne 2$, $(i \ge 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{M}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \ge 2 \wedge i_2 \ge 1)$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. В классе коммутативных коноидов, многообразия $\mathbf{A}_p$, $\mathbf{S}^1_{i,p}$ и $\mathbf{M}$, задаются тождествами $x^p = 1$, $x^i = x^{i+p}$ и $x = x$ соответственно.

Граф Кэли свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x^p = 1$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда порождается единственным элементом, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 1), либо максимум тремя образующими при $p = 2$, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 3.3).

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\mathbf{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$, *тогда* $r_\pi(\mathbf{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \ne 2$, $(i \ge 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{M}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \ge 2 \wedge i_2 \ge 1)$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. В классе коммутативных коноидов, многообразия $\mathbf{A}_p$, $\mathbf{S}^1_{i,p}$ и $\mathbf{M}$, задаются тождествами $x^p = 1$, $x^i = x^{i+p}$ и $x = x$ соответственно.

Граф Кэли свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x^p = 1$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда порождается единственным элементом, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 1), либо максимум тремя образующими при $p = 2$, то есть имеет указанное в ле[illegible]дставление вида 3.3).

1) $S = \langle a \mid a^m = 1 \rangle$,

где m – любое натуральное число;

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\boldsymbol{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$, *тогда* $r_\pi(\boldsymbol{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \ne 2$, $(i \ge 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{M}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \ge 2 \wedge i_2 \ge 1)$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. В классе коммутативных коноидов, многообразия $\mathbf{A}_p$, $\mathbf{S}^1_{i,p}$ и $\mathbf{M}$, задаются тождествами $x^p = 1$, $x^i = x^{i+p}$ и $x = x$ соответственно.

Граф Кэли свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x^p = 1$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда порождается единственным элементом, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 1), либо максимум тремя образующими при $p = 2$, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 3.3).

3.3) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^2 = 1, b^2 = 1, c^2 = 1 \rangle$;

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\mathbf{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$*, тогда* $r_\pi(\mathbf{V}) \le 3$*, более того*:

1) $r_\pi(\mathbf{V}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{A}_m$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \neq 2$, $(i \geq 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\mathbf{V}) = 2 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{M}$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \geq 2 \wedge i_2 \geq 1)$;

3) $r_\pi(\mathbf{V}) = 3 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{A}_2$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. …

Аналогично, граф Кэли свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x^{i+p}=x^i$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда порождается единственным элементом в классе коммутативных моноидов, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 2.1.а) при $t=1$, либо порождается максимум двумя элементами, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 3.1.б), либо порождается максимум тремя элементами, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 4) при $r=m=1$.

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\boldsymbol{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* **V**, *тогда* $r_\pi(\boldsymbol{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \ne 2$, $(i \ge 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{M}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \ge 2 \wedge i_2 \ge 1)$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. …

Аналогично, граф Кэли свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x^{i+p} = x^i$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда порождается единственным элементом в классе коммутативных моноидов, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 2.1.а) при $t = 1$, либо порождается максимум двумя элементами, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 3.1.б), либо порождается максимум тремя элементами, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставлени[illegible]) при $r = m = 1$.

2.1) $S = \langle a, b \mid ab = ba, a^{r+m} = a^r, b^t = 1 \rangle$, где

r, m, t натуральные: а) $t \le 2$;

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\boldsymbol{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$, *тогда* $r_\pi(\boldsymbol{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \ne 2$, $(i \ge 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{M}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \ge 2 \wedge i_2 \ge 1)$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. …

Аналогично, граф Кэли свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x^{i+p} = x^i$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда порождается единственным элементом в классе коммутативных моноидов, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 2.1.а) при $t = 1$, либо порождается максимум двумя элементами, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 3.1.б), либо порождается максимум тремя элементами, то есть имеет указанное [illegible] 1 копредставление вида 4) при $r = m = 1$.

3.1) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, a^{r+m} = a^r, b^{h+t} = b^h, c^k = 1 \rangle$

б) $m \le 2$, $t \le 2$, $k = 1$;

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\mathbf{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$*, тогда* $r_\pi(\mathbf{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\mathbf{V}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{A}_m$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \ne 2$, $(i \ge 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\mathbf{V}) = 2 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{M}$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \ge 2 \wedge i_2 \ge 1)$;

3) $r_\pi(\mathbf{V}) = 3 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{A}_2$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. …

Аналогично, граф Кэли свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x^{i+p}=x^i$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда порождается единственным элементом в классе коммутативных моноидов, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 2.1.а) при $t=1$, либо порождается максимум двумя элементами, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 3.1.б), либо порождается максимум тремя элементами, то есть имеет указанное в лемме 1 копредставление вида 4) при $r=m=1$.

4) $S = \langle a, b, c, d \mid ab = ba, ac = ca, ad = da, bc = cb, bd = db, cd = dc,$
$a^{r+m} = a^r, b^2 = b, c^2 = c, d = 1 \rangle$, $m \le 2$;

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\mathbf{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$, *тогда* $r_\pi(\mathbf{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\mathbf{V}) = 1 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{A}_m$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \neq 2$, $(i \geq 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\mathbf{V}) = 2 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{M}$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \geq 2 \wedge i_2 \geq 1)$;

3) $r_\pi(\mathbf{V}) = 3 \Leftrightarrow \mathbf{V} = \mathbf{A}_2$ или $\mathbf{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. …

И, наконец, граф Кэли абсолютно свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x = x$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда он порождается не более чем двумя элементами в классе коммутативных моноидов, то есть имеет указанное в лемме 2 копредставление вида 2.2).

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\boldsymbol{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* $\mathbf{V}$*, тогда* $r_\pi(\boldsymbol{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_m$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \ne 2$, $(i \ge 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{M}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \ge 2 \wedge i_2 \ge 1)$;

3) $r_\pi(\boldsymbol{V}) = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{V} = \mathbf{A}_2$ или $\boldsymbol{V} = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. …

И, наконец, граф Кэли абсолютно свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x = x$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда он порождается не более чем двумя элементами в классе коммутативных моноидов, то есть имеет указанное в лемме 2 копредставление вида 2.2)

2.2) $S = \langle a, b, c \mid ab = ba, ac = ca, bc = cb, c = 1 \rangle$;

Теорема 3. *Пусть* $r_\pi(\mathbf{V})$ *– ранг планарности многообразия коммутативных моноидов* **V**, *тогда* $r_\pi(\mathbf{V}) \le 3$, *более того*:

1) $r_\pi(V) = 1 \Leftrightarrow V = \mathbf{A}_m$ или $V = \mathbf{S}^1_{i,p}$, где $m \neq 2$, $(i \geq 1 \wedge p > 2)$;

2) $r_\pi(V) = 2 \Leftrightarrow V = \mathbf{M}$ или $V = \mathbf{S}^1_{i_1,1}$ или $V = \mathbf{S}^1_{i_2,2}$, где $(i_1 \geq 2 \wedge i_2 \geq 1)$;

3) $r_\pi(V) = 3 \Leftrightarrow V = \mathbf{A}_2$ или $V = \mathbf{S}^1_{1,1}$.

Доказательство теоремы 3. …

И, наконец, граф Кэли абсолютно свободного моноида многообразия коммутативных моноидов задаваемого тождеством $x = x$, допускает плоскую укладку тогда и только тогда, когда он порождается не более чем двумя элементами в классе коммутативных моноидов, то есть имеет указанное в лемме 2 копредставление вида 2.2).

Иных копредставлений, удовлетворяющих тождествам $x^p = 1$ или $x^i = x^{i+p}$, или $x = x$ в леммах 1 и 2 нет.

Теорема 3 доказана.

Спасибо за внимание!