Контролируемые множества Делоне и непрерывное поле алгебр Роу

В. М. Мануйлов

Московский государственный университет

Москва, 3 июня 2025 г.

Множества Делоне

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Дискретное подмножество $D \subset X$ называется *r-дискретным*, если $d(x, y) \geq r$ для любых $x, y \in D$, $x \neq y$. Оно называется *R-плотным*, если для любого $x \in X$ существует $y \in D$ такой, что $d(x, y) \leq R$. Если D является одновременно r-дискретным и R-плотным, то оно называется *(r, R)-множеством Делоне*. *Множество Делоне* — это (r, R)-множество Делоне для некоторых $r, R > 0$. Для множества Делоне $D \subset X$ обозначим $r(D) = \inf_{x,y \in D, x \neq y} d(x, y)$ и $R(D) = \inf\{R : D \text{ является } R\text{-плотным}\}$.

По лемме Цорна, множества Делоне существуют в любом метрическом пространстве X.

Пусть $F : [0, 1] \to [0, 1]$ — функция, удовлетворяющая следующим свойствам:

(c1) F монотонна, непрерывна и $F(0) = 0$;

(c2) для любого $0 < R \leq 1$ существует множество Делоне D такое, что $R(D) \leq R$ и $r(D) \geq F(R)$.

Метрика на множествах Делоне

Множество Делоне называется *F-контролируемым*, если из $R(D) \geq R$ следует $r(D) \geq F(R)$.

Обозначим через $\mathcal{D}_F$ множество всех F-контролируемых множеств Делоне D с $R(D) \leq 1$, где F, удовлетворяет (c1) и (c2). Очевидно, что если $F_1(t) \leq F_2(t)$ для всех $t \in [0, \infty)$, то $\mathcal{D}_{F_2} \subset \mathcal{D}_{F_1}$.
Положим $\overline{\mathcal{D}}_F = \mathcal{D}_F \cup \{X\}$.
Множества в $\overline{\mathcal{D}}_F$ замкнуты, и на этом подмножестве можно использовать метрику Шаботи. Мы используем следующую ее версию: зафиксируем точку $x_0 \in X$, обозначим через $B_r(x_0)$ открытый шар радиуса r с центром в x_0, и пусть $A^{(+\varepsilon)}$ обозначает ε-окрестность множества $A \subset X$. Определим

$$\rho(D_1, D_2) = \inf \left(\left\{ \varepsilon > 0 : \begin{array}{l} D_1 \cap B_{\frac{1}{\varepsilon}}(x_0) \subset D_2^{(+\varepsilon)} \\ D_2 \cap B_{\frac{1}{\varepsilon}}(x_0) \subset D_1^{(+\varepsilon)} \end{array} \right\} \cup \{1\} \right).$$

Теорема

Если X *— собственное пространство, то* $\overline{\mathcal{D}}_F$ *компактно.*

Лемма

Пусть X *не имеет изолированных точек,* $D_n \in \mathcal{D}_F$, $n \in \mathbb{N}$, *и* $\lim_{n\to\infty} D_n = X$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} R(D_n) = 0$.

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой, то есть X — метрическое пространство, снабжённое мерой μ, определённой на борелевской σ-алгебре, порождённой метрической топологией на X. Будем также предполагать, что X — собственное пространство.

Дискретное метрическое пространство называется *ограниченной геометрии*, если для любого $R > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что число точек в каждом шаре $B_R(u)$, $u \in D$, не превышает N. Скажем, что (X, d, μ) *ограниченной геометрии*, если для любого $R > 0$ существуют $c, C > 0$ такие, что $c \leq \mu(B_R(x)) \leq C$ для любого $x \in X$.

Следующая лемма оправдывает этот термин.

Лемма

Пусть (X, d, μ) — метрическое пространство с мерой ограниченной геометрии, и пусть $D \subset X$ — r-дискретное подмножество. Тогда D имеет ограниченную геометрию.

Алгебры Роу

Напомним определение алгебры Роу метрического пространства X. Пусть H_X — гильбертово пространство с действием алгебры $C_0(X)$ непрерывных функций на X, исчезающих на бесконечности (т.е. $*$-гомоморфизм $\pi: C_0(X) \to \mathbb{B}(H_X)$). Для гильбертова пространства H обозначим через $\mathbb{B}(H)$ (соотв., $\mathbb{K}(H)$) алгебру всех ограниченных (соотв., компактных) операторов на H. Будем предполагать, что

$$\{\pi(f)\xi : f \in C_0(X), \xi \in H_X\} \quad \text{плотно в} \quad H_X; \tag{1}$$

$$\pi(f) \in \mathbb{K}(H_X) \quad \text{влечёт} \quad f = 0. \tag{2}$$

Оператор $T \in \mathbb{B}(H_X)$ называется *локально компактным*, если операторы $T\pi(f)$ и $\pi(f)T$ компактны для любой $f \in C_0(X)$. Он имеет *конечное распространение*, если существует $R > 0$ такое, что $\pi(f)T\pi(g) = 0$, когда расстояние между носителями $f, g \in C_0(X)$ больше R. *Алгебра Роу* $C^*(X, H_X)$ — это пополнение по норме $*$-алгебры локально компактных операторов с конечным распространением на H_X.

Эта конструкция не зависит от выбора H_X, удовлетворяющего (1) и (2), и обычно обозначается $C^*(X)$. Удобно иметь борелевскую меру на X. Если мера μ на X не имеет атомов, то простейший выбор $H_X = L^2(X)$ со стандартным действием $C_0(X)$ удовлетворяет условиям (1) и (2), поэтому для определения алгебры Роу достаточно использовать $L^2(X)$.
Если X дискретно, выбор $H_X = l^2(X)$ не удовлетворяет условию (2). Чтобы исправить это, можно взять $H_X = l^2(X) \otimes H$ с бесконечномерным гильбертовым пространством H. Однако есть и другой вариант: по-прежнему использовать $H_X = l^2(X)$. Получающаяся C^*-алгебра называется *равномерной алгеброй Роу* пространства X и обозначается $C^*_u(X)$. Эта C^*-алгебра отличается от алгебры Роу $C^*(X)$. Она более управляема, но имеет меньше связей с эллиптической теорией.

Есть ещё одна C^*-алгебра такого типа, предложенная Я. Шпакулой. Семейство операторов $\mathcal{T}$ на $L^2(X)$ называется *равномерно аппроксимируемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $N \in \mathbb{N}$ такое, что для любого $T \in \mathcal{T}$ существует оператор K ранга $\leq N$, для которого $\|T - K\| < \varepsilon$. Оператор T называется *равномерно локально компактным*, если для любого $R > 0$ семейство

$$\{\pi(f)T, T\pi(f) : f \in C_0(X), \operatorname{diam}(\operatorname{supp} f) \leq R \text{ и } \|f\|_\infty \leq 1\}$$

равномерно аппроксимируемо. Произведение двух равномерно аппроксимируемых операторов с конечным распространением является оператором того же типа, поэтому множество таких операторов образует $*$-подалгебру в $C^*(X)$, а её замыкание — это C^*-алгебра, обозначаемая $C^*_k(X)$.

Пусть $D \subset X$ — множество Делоне, и пусть $\{V_u\}_{u \in D}$ — разбиение X, т.е. семейство открытых подмножеств X таких, что

(v1) существуют $r, R > 0$ такие, что $B_r(u) \subset V_u \subset B_R(u)$ для любого $u \in D$;

(v2) $X = \cup_{u \in D} \overline{V}_u$;

(v3) $\mu(\overline{V}_u \cap \overline{V}_v) = 0$ для любых $u, v \in D$;

(v4) $\dim L^2(V_u) = \infty$ для любого $u \in D$.

Если X — симплициальный комплекс, то в качестве $\{V_u\}_{u \in D}$ можно взять ячейки Вороного.

Из (v2) и (v3) следует, что $L^2(X) = \oplus_{u \in D} L^2(V_u)$, и оператор на $L^2(X)$ можно записать в виде бесконечной матрицы $T = (T_{uv})_{u,v \in D}$, где T_{uv} — оператор из $L^2(V_v)$ в $L^2(V_u)$.

Зафиксируем изометрические изоморфизмы $\zeta_u : l^2(\mathbb{N}) \to L^2(V_u)$. Они индуцируют $*$-изоморфизмы $\tilde{\zeta}_u : \mathbb{B}(l^2(\mathbb{N})) \to \mathbb{B}(L^2(V_u))$. Обозначим через $p_n \in \mathbb{B}(l^2(\mathbb{N}))$ проекцию на первые n координат. Оператор $T = (T_{uv})_{u,v \in D} \in C^*(X)$ равномерно локально компактен, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\|T_{uv} - \tilde{\zeta}_u(p_n) T_{uv} \tilde{\zeta}_v(p_n)\| < \varepsilon$ для любых $u, v \in D$.

Шпакула показал, что $C^*_u(D) \otimes \mathbb{K} \cong C^*_k(X)$ для любого $D \subset X$.

Разбиения единицы

Лемма

Пусть D — (r, R)-множество Делоне в метрическом пространстве с мерой X ограниченной геометрии. Тогда существует набор функций $\{\phi_u^D\}_{u \in D}$ в $L^2(X)$ со следующими свойствами:

(p1) $\operatorname{supp} \phi_u^D \subset B_{2R}(u)$ *для любого* $u \in D$;

(p2) $\phi_u^D(x) = 1$ *для любого* $x \in B_{r/6}(u)$;

(p3) $\sum_{u \in D} \phi_u^D(x) = 1$ *для любого* $x \in X$;

(p4) *существует* $L > 0$ *такое, что* ϕ_u^D *является* L*-липшицевой для любого* $u \in D$.

Пусть $L^2(X) = L^2(X, \mu)$ — гильбертово пространство квадратично интегрируемых функций. Положим $g^D_{uv} = \langle \phi^D_u, \phi^D_v \rangle$. Матрицу $G^D = (g^D_{uv})_{u,v \in D}$ можно рассматривать как матрицу оператора в $l^2(D)$ относительно стандартного базиса $\{\delta_u\}_{u \in D}$.

Лемма

Матрица G^D задает ограниченный положительный обратимый оператор в $l^2(D)$.

Для данного разбиения единицы положим $\xi_u = (G^D)^{1/2}(\delta_u)$. Так как $\{\xi_u\}_{u \in D}$ — базис в $l^2(D)$, определим линейное отображение $U_D : l^2(D) \to L^2(X)$ формулой $U_D(\xi_u) = \phi^D_u$.

$$\begin{aligned} \langle \xi_u, \xi_v \rangle &= \langle (G^D)^{1/2}\delta_u, (G^D)^{1/2}\delta_v \rangle \\ &= \langle \delta_u, G^D \delta_v \rangle = \langle \delta_u, \sum_{w \in D} g^D_{wv}\delta_w \rangle = g^D_{uv} \\ &= \langle \phi^D_u, \phi^D_v \rangle. \end{aligned}$$

Оператор U_D — изометрия. Положим $\psi_u^D = U^D(\delta_u)$. Тогда $\{\psi_u^D\}_{u\in D}$ — ортонормированная система в $L^2(X)$. Обозначим через H^D линейную оболочку функций $\{\psi_u^D\}_{u\in D}$ (или, эквивалентно, функций $\{\phi_u^D\}_{u\in D}$). Тогда $P_D = U_D U_D^*$ — проектор на H^D в $L^2(X)$.

Лемма

Пусть $D_n \in \mathcal{D}_F$, $\lim_{n\to\infty} D_n = X$. Тогда последовательность проекторов P_{D_n} сильно сходится к тождественному оператору в $L^2(X)$.

Определим $\alpha^D : C_u^*(D) \to \mathbb{B}(L^2(X))$ формулой

$$\alpha^D(T) = U_D T U_D^*,$$

и $\beta^D : C^*(X) \to \mathbb{B}(l^2(D))$ формулой

$$\beta^D(S) = U_D^* S U_D.$$

Лемма

Образ α^D лежит в $C^*(X)$; образ β^G лежит в $C_u^*(D)$.

Разбиение X

Здесь мы построим специальное разбиение X. Для $A \subset X$ и $\delta > 0$ обозначим через $A^{(-\delta)}$ множество $A^{(-\delta)} = \{x \in X : d(x, X \setminus A) > \delta\}$.

Лемма

Пусть X — собственное метрическое пространство с мерой ограниченной геометрии без изолированных точек, и пусть $D \subset X$ — множество Делоне. Тогда существует семейство открытых подмножеств $\{V_u\}_{u \in D}$ таких, что

(V1) $B_{r(D)/2}(u) \subset V_u \subset B_{2R(D)}(u)$ *для любого* $u \in D$*;*

(V2) $V_u \cap V_v = \emptyset$ *для* $u \neq v \in D$, *и* $X = \cup_{u \in D} \overline{V}_u$*;*

(V3) *для любого* $u \in D$ *и* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что* $\mu(V_u \setminus V_u^{(-\delta)}) < \varepsilon$*;*

(V4) $\dim L^2(V_u) = \infty$.

Зафиксируем $D = D_1$, пусть $\{V_u\}_{u \in D}$ — разбиение X, удовлетворяющее (V1)-(V3), и пусть $\{\phi_v\}_{v \in D_n}$ — разбиение единицы, построенное выше. Будем писать $v \prec u$, если $\operatorname{supp} \phi_v^{D_n} \subset V_u$. Обозначим через $Q_u^{D_n}$ проектор на линейную оболочку функций $\phi_v^{D_n}$, $v \prec u$. Тогда образ $Q_u^{D_n}$ лежит в $L^2(V_u)$.

Лемма

Пусть $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность точек в $\mathcal{D}_F$, сходящаяся к X. Тогда последовательность $\{Q_u^{D_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ сильно сходится к тождественному оператору в $L^2(V_u)$ для любого $u \in D_1$.

Пусть $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек в $\mathcal{D}_F$, сходящаяся к X, $D = D_1$, и пусть $\{\phi_v^{D_n}\}_{v\in D_n}$ — разбиение единицы, построенное выше. Для $u \in D$ обозначим через H_u^n замыкание линейной оболочки функций $\phi_v^{D_n}$, $v \prec u$ (т.е. $\operatorname{supp} \phi_v^{D_n} \subset V_u$). Положим $m_u^n = \dim H_u^n$, $m^n = \min\{m_u^n : u \in D\}$.

Лемма

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ *верно* $m(n) = \sup_{u\in D} m_u^n < \infty$, *и* $\lim_{n\to\infty} m^n = \infty$.

Лемма

Пусть $T \in C_k^*(X)$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} \|\alpha^{D_n}\beta^{D_n}(T) - T\| = 0$.

Лемма

Пусть $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *— последовательность множеств Делоне в* $\mathcal{D}_F$, *сходящаяся к* X, *и пусть* $\{V_u\}_{u\in D_1}$ *— разбиение* X, *удовлетворяющее (V1)-(V4). Тогда* $\cup_{n\in\mathbb{N}}\alpha^{D_n}(C_u^*(D_n))$ *плотно в* $C_k^*(X)$.

Напомним, что непрерывное поле C^*-алгебр над локально компактным хаусдорфовым пространством T — это тройка $(T, A, \pi_t : A \to A_t)$, где A и A_t, $t \in A$, — C^*-алгебры, $*$-гомоморфизмы π_t сюръективны, семейство $\{\pi_t\}_{t\in T}$ точно, и отображение $t \mapsto \|\pi_t(a)\|$ непрерывно для любого $a \in A$.
Пусть $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность точек в $\mathcal{D}_F$ такая, что $\lim_{n\to\infty} D_n = X$. Положим $T = \{D_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{X\}$. Отождествим T с $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ с метрикой из $\overline{\mathcal{D}}_F$. Положим $A_n = C^*_u(D_n)$, $A_\infty = C^*_k(X)$.
Пусть $F(T) = \prod_{t\in T} A_t$ — C^*-алгебра семейств $a = (a_t)_{t\in T}$ таких, что $a_t \in A_t$ для каждого $t \in T$, и $\sup_{t\in T} \|a_t\| < \infty$.
Положим $J = \{(a_t)_{t\in T} \in F(T) : a_\infty = \lim_{t\to\infty} \|a_t\| = 0\} \cong \oplus_{t\in\mathbb{N}} A_t$. Это идеал в $F(T)$.
Для $S \in C^*(X)$ положим $b_S(t) = \begin{cases} \beta^{D_t}(S) & \text{если } t \neq \infty; \\ S & \text{если } t = \infty. \end{cases}$ Так как β^{D_t} — сжатие для любого $t \in \mathbb{N}$, то $b_S \in F(T)$. Пусть B — $*$-подпространство в $F(T)$, порождённое b_S, $S \in C^*_k(X)$.
Положим $A = J + B \subset F(T)$.

Лемма

Пусть $R, S \in C_k^*(X)$. *Тогда* $\lim_{n\to\infty} \beta^{D_n}(RS) - \beta^{D_n}(R)\beta^{D_n}(S) = 0$, *т.е.* $b_{RS} - b_R b_S \in J$.

Лемма

Линейное пространство A *является* $*$*-алгеброй.*

Лемма

Для любого $S \in C^*(X)$ *верно* $\lim_{n\to\infty} \|\beta^{D_n}(S)\| = \|S\|$.

Лемма

Для любого $b = (b_t)_{t\in T} \in A$ *верно* $\lim_{n\to\infty} \|b_t\| = \|b_\infty\|$.

Лемма

$*$*-алгебра* A *замкнута по норме.*

Пусть $*$-гомоморфизм $\pi_t : A \to A_t$ определён формулой $\pi_t(a + \beta(S)) = a_t + \beta_t(S)$, $t \in T$. Эти отображения корректно определены, так как $J + B$ — прямая сумма.

Теорема

Пусть X — собственное метрическое пространство с мерой ограниченной геометрии без изолированных точек, и пусть D_n, $n \in \mathbb{N}$, — последовательность управляемых множеств Делоне, сходящаяся к X. Тогда построенная выше тройка $(T, A, \pi_t : A \to A_t)$ является непрерывным полем C^*-алгебр.

Спасибо!