Однофазные решения трех-волнового уравнения

А.О. Смирнов

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения

«Геометрия, топология и математическая физика»
памяти Сергея Петровича Новикова
Москва, МИАН, 04 июня 2025

Введение

Рассмотрим следующую пару Лакса

$$i\partial_x \Psi + U\Psi = 0,$$
$$i\partial_t \Psi + V\Psi = 0,$$

где $U = U^0 - \lambda J$, $V = V^0 - \lambda K$,

$$J = \frac{1}{3}\mathrm{diag}(a_1 - a_3, a_2 - a_1, a_3 - a_2), \quad a_1 + a_2 + a_3 = 0, \quad a_j \neq 0,$$
$$K = \frac{1}{3}\mathrm{diag}(b_1 - b_3, b_2 - b_1, b_3 - b_2), \quad b_1 + b_2 + b_3 = 0, \quad b_j \neq 0,$$

Введение

$$U^0 = [J, Q] = \begin{pmatrix} 0 & a_1 u_1 & -a_3 v_3 \\ -a_1 v_1 & 0 & a_2 u_2 \\ a_3 u_3 & -a_2 v_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V^0 = [K, Q] = \begin{pmatrix} 0 & b_1 u_1 & -b_3 v_3 \\ -b_1 v_1 & 0 & b_2 u_2 \\ b_3 u_3 & -b_2 v_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & u_1(x,t) & v_3(x,t) \\ v_1(x,t) & 0 & u_2(x,t) \\ u_3(x,t) & v_2(x,t) & 0 \end{pmatrix},$$

Введение

Условием совместности данной пары Лакса является следующий вариант системы трех волн

$$\begin{aligned} ia_1\partial_t u_1 - ib_1\partial_x u_1 &= \kappa v_2 v_3, \\ ia_2\partial_t u_2 - ib_2\partial_x u_2 &= \kappa v_1 v_3, \\ ia_3\partial_t u_3 - ib_3\partial_x u_3 &= \kappa v_1 v_2, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} ia_1\partial_t v_1 - ib_1\partial_x v_1 &= \kappa u_2 u_3, \\ ia_2\partial_t v_2 - ib_2\partial_x v_2 &= \kappa u_1 u_3, \\ ia_3\partial_t v_3 - ib_3\partial_x v_3 &= \kappa u_1 u_2. \end{aligned}$$

Здесь $\kappa = a_1 b_3 - a_3 b_1 = a_2 b_1 - a_1 b_2 = a_3 b_2 - a_2 b_3$. Нетрудно видеть, что, если $v_j = \sigma_j u_j^*$, где $\sigma_j = \pm 1$, и $a_j^* = \sigma a_j$, $b_j^* = \sigma b_j$, то $\sigma = -\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ и $\kappa \in \mathbb{R}$.

Вспомогательная иерархия

Рассмотрим также вспомогательную пару Лакса

$$
\begin{aligned}
i\partial_\xi \Psi + \widehat{U}\Psi &= 0,\\
i\partial_{\eta_k}\Psi + W_k\Psi &= 0,
\end{aligned}
$$

где $\widehat{U} = \widehat{U}_0 - \lambda \widehat{J}$, $\widehat{U}_0 = [\widehat{J}, Q]$, $W_1 = \lambda \widehat{U} + W_1^0$,

$$
W_k^0 = \begin{pmatrix} F_k^2 - F_k^1 & H_k^1 & G_k^3 \\ G_k^1 & F_k^1 & H_k^2 \\ H_k^3 & G_k^2 & -F_k^2 \end{pmatrix}, \qquad W_{k+1} = \lambda W_k + W_{k+1}^0, \quad k \geqslant 1,
$$

$$
\widehat{J} = \frac{1}{3}\,\mathrm{diag}(s_1 - s_3, s_2 - s_1, s_3 - s_2), \quad s_1 + s_2 + s_3 = 0, \quad s_j \neq 0.
$$

Заметим что при $v_j = \sigma_j u_j^*$ выполняются следующие условия вещественности $(\sigma = -\sigma_1\sigma_2\sigma_3)$

$$
s_j^* = \sigma s_j, \quad (H_k^j)^* = -\sigma^{k-1}\sigma_j G_k^j, \quad (F_k^j)^* = \sigma^k F_k^j.
$$

Вспомогательная иерархия

Из условия совместности вспомогательной пары Лакса вытекают следующие соотношения

$$
\begin{aligned}
&[\widehat{J}, W_1^0] = i\partial_\xi \widehat{U}^0,\\
&[\widehat{J}, W_{k+1}^0] = i\partial_\xi W_k^0 - [W_k^0, \widehat{U}^0],\\
&i\partial_{\eta_k} U^0 = i\partial_\xi W_k^0 - [W_k^0, \widehat{U}^0] = [\widehat{J}, W_{k+1}^0].
\end{aligned}
$$

Из первых двух уравнений данной системы вытекают рекуррентные соотношения на элементы матриц W_k^0. Последнее уравнение определяет нелинейные эволюционные интегрируемые уравнения из вспомогательной иерархии:

$$\partial_{\eta_k} u_j = -iH_{k+1}^j, \quad \partial_{\eta_k} v_j = -iG_{k+1}^j.$$

Вспомогательная иерархия

Рекуррентные соотношения на элементы матриц W_k^0 имеют следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&H_1^j = i\partial_\xi u_j, \quad G_1^j = i\partial_\xi v_j,\\
&\partial_\xi F_k^1 = is_2(G_k^2 u_2 + H_k^2 v_2) - is_1(G_k^1 u_1 + H_k^1 v_1),\\
&\partial_\xi F_k^2 = is_2(G_k^2 u_2 + H_k^2 v_2) - is_3(G_k^3 u_3 + H_k^3 v_3),\\
&s_1 H_{k+1}^1 = i\partial_\xi H_k^1 + (2F_k^1 - F_k^2)s_1 u_1 - G_k^2 s_3 v_3 + G_k^3 s_2 v_2,\\
&s_2 H_{k+1}^2 = i\partial_\xi H_k^2 - (F_k^1 + F_k^2)s_2 u_2 - G_k^3 s_1 v_1 + G_k^1 s_3 v_3,\\
&s_3 H_{k+1}^3 = i\partial_\xi H_k^3 - (F_k^1 - 2F_k^2)s_3 u_3 - G_k^1 s_2 v_2 + G_k^2 s_1 v_1,\\
&s_1 G_{k+1}^1 = -i\partial_\xi G_k^1 - (2F_k^1 - F_k^2)s_1 v_1 + H_k^2 s_3 u_3 - H_k^3 s_2 u_2,\\
&s_2 G_{k+1}^2 = -i\partial_\xi G_k^2 + (F_k^1 + F_k^2)s_2 v_2 + H_k^3 s_1 u_1 - H_k^1 s_3 u_3,\\
&s_3 G_{k+1}^3 = -i\partial_\xi G_k^3 + (F_k^1 - 2F_k^2)s_3 v_3 + H_k^1 s_2 u_2 - H_k^2 s_1 u_1.
\end{aligned}
$$

В частности,

$$F_1^1 = s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2, \quad F_1^2 = s_3\mathcal{P}_3 - s_2\mathcal{P}_2,$$
$$s_1 H_2^1 = -\partial_\xi^2 u_1 + is_2 v_2 \partial_\xi v_3 - is_3 v_3 \partial_\xi v_2 + (2s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2 - s_3\mathcal{P}_3) s_1 u_1,$$
$$s_2 H_2^2 = -\partial_\xi^2 u_2 + is_3 v_3 \partial_\xi v_1 - is_1 v_1 \partial_\xi v_3 + (2s_2\mathcal{P}_2 - s_3\mathcal{P}_3 - s_1\mathcal{P}_1) s_2 u_2,$$
$$s_3 H_2^3 = -\partial_\xi^2 u_3 + is_1 v_1 \partial_\xi v_2 - is_2 v_2 \partial_\xi v_1 + (2s_3\mathcal{P}_3 - s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2) s_3 u_3,$$
$$s_1 G_2^1 = \partial_\xi^2 v_1 - is_2 u_2 \partial_\xi u_3 + is_3 u_3 \partial_\xi u_2 - (2s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2 - s_3\mathcal{P}_3) s_1 v_1,$$
$$s_2 G_2^2 = \partial_\xi^2 v_2 - is_3 u_3 \partial_\xi u_1 + is_1 u_1 \partial_\xi u_2 - (2s_2\mathcal{P}_2 - s_3\mathcal{P}_3 - s_1\mathcal{P}_1) s_2 v_2,$$
$$s_3 G_2^3 = \partial_\xi^2 v_3 - is_1 u_1 \partial_\xi u_2 + is_2 u_2 \partial_\xi u_1 - (2s_3\mathcal{P}_3 - s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2) s_3 v_3,$$
$$F_2^1 = s_3(\widehat{A} - \widehat{B}) + i(w_2 - w_1), \quad F_2^2 = s_1(\widehat{B} - \widehat{A}) + i(w_2 - w_3),$$

где $\mathcal{P}_j = u_j v_j$, $\widehat{A} = u_1 u_2 u_3$, $\widehat{B} = v_1 v_2 v_3$, $w_j = u_j \partial_\xi v_j - v_j \partial_\xi u_j$.

Стационарные уравнения

Стационарные нелинейными дифференциальные уравнения – это уравнения, которые удовлетворяются многофазными решениями (конечнозонными и их вырождениями). В случае уравнения Кортевега-де Фриза эти уравнения называются уравнениями Новикова.

В случае системы трех волн они иеют вид

$$H^j_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} c_k H^j_{n-k+1} - 3c_{n+j} u_j = 0,$$

$$G^j_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} c_k G^j_{n-k+1} + 3c_{n+j} v_j = 0.$$

Из условий вещественности и данных равенств вытекают следующие требования на постоянные c_k:

$$c_k^* = \sigma^k c_k, \quad k = 1, \dots, n,$$

$$c_{n+j}^* = \sigma^n c_{n+j}, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Спектральная кривая

Для каждой иерархии существуют разные типы решений с одинаковым количеством фаз. Каждый тип многофазных решений имеет свой собственный тип спектральной кривой. С одной стороны, коэффициенты уравнения спектральной кривой являются постоянными величинами, а с другой стороны, они являются функциями от решения и его производных. Одна часть коэффициентов уравнения спектральной кривой выражается через коэффициенты стационарных уравнений, а вторая часть представляет собой дополнительные интегралы от решения и его производных. Соответственно, эти дополнительные интегралы определяют тип многофазного решения с заданным количеством фаз.

Спектральная кривая

Напомним, что спектральная кривая определяется уравнением

$$\Gamma := \{(\mu, \lambda) : \mathcal{R}(\mu, \lambda) = \det(\mu I - M(\lambda)) = 0\}, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{C},$$

где матрица $M(\lambda)$ имеет следующий вид

$$M_n = W_n + \sum_{k=1}^{n-1} c_k W_{n-k} + c_n \widehat{U} + J_n.$$

Здесь c_k есть постоянные,

$$J_n = \mathrm{diag}(c_{n+3} - c_{n+1}, c_{n+1} - c_{n+2}, c_{n+2} - c_{n+3}),$$
$$c_{n+1} + c_{n+2} + c_{n+3} = 0.$$

Нетрудно получить, что спектральная кривая имеет следующее уравнение

$$\mu^3 + \mathcal{A}(\lambda)\mu + \mathcal{B}(\lambda) = 0,$$

где

$$\mathcal{A}(\lambda) = -\frac{1}{3}(s_1^2 + s_1 s_2 + s_2^2)\lambda^{2n+2} + \sum_{k=1}^{2n+2} \mathcal{A}_k \lambda^{2n+2-k},$$

$$\mathcal{B}(\lambda) = \frac{1}{27}(s_1 - s_3)(s_2 - s_1)(s_3 - s_2)\lambda^{3n+3} + \sum_{k=1}^{3n+3} \mathcal{B}_k \lambda^{3n+3-k}.$$

Спектральная кривая

Вычисляя дискриминант кубического многочлена от μ, задающего уравнение спектральной кривой, после упрощения получаем следующий многочлен от λ

$$\mathcal{D} = (s_1 s_2 s_3)^2 \lambda^{6n+6} + \sum_{k=1}^{6n+6} D_k \lambda^{6n+6-k}.$$

Поскольку коэффициенты $s_j \neq 0$, то дискриминант имеет $6n+6$ нулей. Следовательно спектральная кривая имеет $6n+6$ точек ветвления. Используя формулу Римана-Гурвица

$$g = \frac{K}{2} - N + 1,$$

где $K = 6n+6$ есть число точек ветвления, а $N = 3$ – число листов накрытия, получаем, что род спектральной кривой равен $g = 3n+1$.

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Пусть род спектральной кривой равен $g = 1$ $(n = 0)$. Матрица $M(\lambda)$ при $n = 0$ определяется следующим равенством

$$M_0 = \widehat{U} + J_0 = \begin{pmatrix} -\lambda(s_1 - s_3)/3 & s_1 u_1 & -s_3 v_3 \\ -s_1 v_1 & -\lambda(s_2 - s_1)/3 & s_2 u_2 \\ s_3 u_3 & -s_2 v_2 & -\lambda(s_3 - s_2)/3 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} c_3 - c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 - c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 - c_3 \end{pmatrix}, \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0, \quad c_j \in \mathbb{R}.$$

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Для $n = 0$ стационарные уравнения принимают вид

$$-i\partial_\xi u_j - 3c_j u_j = 0, \quad -i\partial_\xi v_j + 3c_j v_j = 0.$$

Решая стационарные уравнения, получаем

$$u_j(\xi, \eta_k) = u_{j0}(\eta_k)e^{3ic_j\xi}, \quad v_j(\xi, \eta_k) = v_{j0}(\eta_k)e^{-3ic_j\xi}.$$

Следовательно, $\mathcal{P}_j = u_{j0}(\eta_k)v_{j0}(\eta_k)$, а поскольку

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0,$$

то $\widehat{A} = u_{10}u_{20}u_{30}$ и $\widehat{B} = v_{10}v_{20}v_{30}$.

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Рассматривая первые уравнения иерархии, т.е. полагая $\eta = \eta_1$, имеем

$$\partial_\eta u_{10} = -is_1^{-1}\left(9c_1^2 u_{10} - hv_{20}v_{30} + (2s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2 - s_3\mathcal{P}_3)s_1 u_{10}\right),$$
$$\partial_\eta u_{20} = -is_2^{-1}\left(9c_2^2 u_{20} - hv_{30}v_{10} + (2s_2\mathcal{P}_2 - s_3\mathcal{P}_3 - s_1\mathcal{P}_1)s_2 u_{20}\right),$$
$$\partial_\eta u_{30} = -is_3^{-1}\left(9c_3^2 u_{30} - hv_{10}v_{20} + (2s_3\mathcal{P}_3 - s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2)s_3 u_{30}\right),$$
$$\partial_\eta v_{10} = is_1^{-1}\left(9c_1^2 v_{10} + hu_{20}u_{30} + (2s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2 - s_3\mathcal{P}_3)s_1 v_{10}\right),$$
$$\partial_\eta v_{20} = is_2^{-1}\left(9c_2^2 v_{20} + hu_{30}u_{10} + (2s_2\mathcal{P}_2 - s_3\mathcal{P}_3 - s_1\mathcal{P}_1)s_2 v_{20})\right),$$
$$\partial_\eta v_{30} = is_3^{-1}\left(9c_3^2 v_{30} + hu_{10}u_{20} + (2s_3\mathcal{P}_3 - s_1\mathcal{P}_1 - s_2\mathcal{P}_2)s_3 v_{30}\right).$$

Здесь $h = 3(s_2c_1 - s_1c_2) = 3(s_1c_3 - s_3c_1) = 3(s_3c_2 - s_2c_3) \neq 0$, $h^* = \sigma h$.

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Используя эволюционные уравнения, вычисляем производные функций $\mathcal{P}_j$

$$\partial_\eta \mathcal{P}_1 = \frac{ih}{s_1}(\widehat{B} + \widehat{A}), \quad \partial_\eta \mathcal{P}_2 = \frac{ih}{s_2}(\widehat{B} + \widehat{A}), \quad \partial_\eta \mathcal{P}_3 = \frac{ih}{s_3}(\widehat{B} + \widehat{A}),$$

а также $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$

$$\partial_\eta \widehat{A} = -9i\left(\frac{c_1^2}{s_1} + \frac{c_2^2}{s_2} + \frac{c_3^2}{s_3}\right)\widehat{A} + ih\left(\frac{1}{s_1}\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3 + \frac{1}{s_3}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + \frac{1}{s_2}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3\right),$$

$$\partial_\eta \widehat{B} = 9i\left(\frac{c_1^2}{s_1} + \frac{c_2^2}{s_2} + \frac{c_3^2}{s_3}\right)\widehat{B} + ih\left(\frac{1}{s_1}\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3 + \frac{1}{s_3}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 + \frac{1}{s_2}\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3\right).$$

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Из уравнений на $\mathcal{P}_j$ вытекают следующие равенства

$$\mathcal{P}_1 = \frac{s_2}{s_1}(\mathcal{P}_2 + k_1), \quad \mathcal{P}_3 = \frac{s_2}{s_3}(\mathcal{P}_2 + k_2)$$

где $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ есть некоторые постоянные.
Упрощая F_1^1 и F_1^2, имеем

$$F_1^1 = s_2 k_1, \quad F_1^2 = s_2 k_2.$$

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Из уравнений на $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\mathcal{P}_j$ получаем

$$\partial_\eta(\widehat{B}-\widehat{A}) = 9i\left(\frac{c_1^2}{s_1}+\frac{c_2^2}{s_2}+\frac{c_3^2}{s_3}\right)(\widehat{A}+\widehat{B})$$
$$= \frac{9s_2}{h}\left(\frac{c_1^2}{s_1}+\frac{c_2^2}{s_2}+\frac{c_3^2}{s_3}\right)\partial_\eta\mathcal{P}_2.$$

Соответственно,

$$\widehat{B}-\widehat{A} = \frac{9s_2}{h}\left(\frac{c_1^2}{s_1}+\frac{c_2^2}{s_2}+\frac{c_3^2}{s_3}\right)(\mathcal{P}_2+k_3) = -\frac{h}{s_1 s_3}(\mathcal{P}_2+k_3),$$

где k_3 есть некоторая постоянная.

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Зная $(\widehat{B}+\widehat{A})$ и $(\widehat{B}-\widehat{A})$, находим отдельные слагаемые

$$\widehat{A}=-i\frac{s_2}{2h}\partial_\eta \mathcal{P}_2+\frac{h}{2s_1s_3}(\mathcal{P}_2+k_3),$$
$$\widehat{B}=-i\frac{s_2}{2h}\partial_\eta \mathcal{P}_2-\frac{h}{2s_1s_3}(\mathcal{P}_2+k_3).$$

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Из равенства $\widehat{A}\widehat{B} = \mathcal{P}_1\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3$ и соотношений на $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ и $\mathcal{P}_j$ вытекает следующее дифференциальное уравнение на $\mathcal{P}_2$

$$(\partial_\eta \mathcal{P}_2)^2 = -\frac{4h^2}{s_1 s_3}\mathcal{P}_2^3 + \widehat{c}_1\mathcal{P}_2^2 + \widehat{c}_2\mathcal{P}_2 + \widehat{c}_3.$$

Здесь

$$\widehat{c}_1 = -\frac{h^4}{s_1^2 s_2^2 s_3^2} - \frac{4h^2(k_1 + k_2)}{s_1 s_3},$$

$$\widehat{c}_2 = -\frac{2h^4 k_3}{s_1^2 s_2^2 s_3^2} - \frac{4h^2 k_1 k_2}{s_1 s_3}, \quad \widehat{c}_3 = -\frac{h^4 k_3^2}{s_1^2 s_2^2 s_3^2}.$$

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Из уравнения на $\mathcal{P}_2$ вытекает, что в общем случае функция $\mathcal{P}_2(\eta)$ выражается через эллиптическую $\wp$-функцию Вейерштрасса по формуле

$$\mathcal{P}_2(\eta) = -\frac{s_1 s_3}{h^2}\wp(\eta; g_2, g_3) - \frac{k_1 + k_2}{3} - \frac{h^2}{12 s_1 s_2^2 s_3},$$

где

$$g_2 = \frac{4(k_1^2 - k_1 k_2 + k_2^2)h^4}{3 s_1^2 s_3^2} + \frac{2(k_1 + k_2 - 3k_3)h^6}{3 s_1^3 s_2^2 s_3^3} + \frac{h^8}{12 s_1^4 s_2^4 s_3^4},$$

$$g_3 = \frac{4(2k_1^3 - 3k_1^2 k_2 - 3k_1 k_2^2 + 2k_2^3)h^6}{27 s_1^3 s_3^3} + \frac{(2k_1^2 + k_1 k_2 + 2k_2^2 - 6k_1 k_3 - 6k_2 k_3 + 9k_3^2)h^8}{9 s_1^4 s_2^2 s_3^4} + \frac{(k_1 + k_2 - 3k_3)h^{10}}{18 s_1^5 s_2^4 s_3^5} + \frac{h^{12}}{216 s_1^6 s_2^6 s_3^6}.$$

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Вычисляя $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_3$, получаем

$$\mathcal{P}_1(\eta) = -\frac{s_2 s_3}{h^2}\wp(\eta; g_2, g_3) + \frac{(2k_1 - k_2)s_2}{3s_1} - \frac{h^2}{12 s_1^2 s_2 s_3},$$
$$\mathcal{P}_3(\eta) = -\frac{s_1 s_2}{h^2}\wp(\eta; g_2, g_3) + \frac{(2k_2 - k_1)s_2}{3s_3} - \frac{h^2}{12 s_1 s_2 s_3^2}.$$

Простейшие решения уравнений вспомогательной иерархии.

Дискриминант $\wp$-функции Вейерштрасса равен

$$D = \frac{256 k_1^2 k_2^2 h^8}{s_1^4 s_3^4}(k_1 - k_2)^2 + \frac{128 h^{10}}{s_1^5 s_2^2 s_3^5}\Big(-2k_2^3 k_3^2 + k_1 k_2^2 k_3 (2k_2 + 3k_3)$$
$$+ k_1^3 (k_2^2 + 2k_2 k_3 - 2k_3^2) + k_1^2 k_2 (k_2^2 - 8k_2 k_3 + 3k_3^2)\Big)$$
$$+ \frac{16 h^{12}}{s_1^6 s_2^4 s_3^6}\Big(k_3^2(-8k_2^2 + 36 k_2 k_3 - 27 k_3^2) + k_1^2 (k_2^2 + 8k_2 k_3 - 8k_3^2)$$
$$+ 2k_1 k_3 (4k_2^2 - 23 k_2 k_3 + 18 k_3^2)\Big) - \frac{16 h^{14}}{s_1^7 s_2^6 s_3^7}\left((k_1 - k_3) k_3 (k_3 - k_2)\right).$$

Если $D > 0$, то $\wp(\omega_j) \in \mathbb{R}$, где $\wp'(\omega_j) = 0$. Если $D = 0$, то $\mathcal{P}_2(\eta)$ является гиперболической или тригонометрической функцией.

При $n = 0$ коэффициенты уравнения спектральной кривой имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= s_2(c_1 - c_2) + s_3(c_1 - c_3),\\
\mathcal{A}_2 &= -3(c_2^2 + c_2c_3 + c_3^2) + s_1^2\mathcal{P}_1 + s_2^2\mathcal{P}_2 + s_3^2\mathcal{P}_3,\\
\mathcal{B}_1 &= \frac{c_2}{3}(2s_2^2 + 2s_2s_3 - s_3^2) + \frac{c_3}{3}(s_2^2 - 2s_2s_3 - 2s_3^2),\\
\mathcal{B}_2 &= s_1(c_3^2 - 2c_1c_3 - 2c_1^2) + s_3(2c_3^2 + 2c_1c_3 - c_1^2)\\
&\quad + \frac{s_1^2(s_3 - s_2)}{3}\mathcal{P}_1 + \frac{s_2^2(s_1 - s_3)}{3}\mathcal{P}_2 + \frac{s_3^2(s_2 - s_1)}{3}\mathcal{P}_3,\\
\mathcal{B}_3 &= (c_1 - c_3)(c_2 - c_1)(c_3 - c_2) - s_1s_2s_3\widehat{A} + s_1s_2s_3\widehat{B}\\
&\quad + s_1^2(c_3 - c_2)\mathcal{P}_1 + s_2^2(c_1 - c_3)\mathcal{P}_2 + s_3^2(c_2 - c_1)\mathcal{P}_3.
\end{aligned}$$

Уравнение спектральной кривой при $n = 0$

Упрощая коэффициенты, содержащие $\mathcal{P}_j$, получаем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_2 = & -3(c_1^2 + c_1 c_3 + c_3^2) + s_2(s_1 k_1 + s_3 k_2), \\
\mathcal{B}_2 = & \, s_1(c_3^2 - 2c_1 c_3 - 2c_1^2) + s_3(2c_3^2 + 2c_1 c_3 - c_1^2) \\
& + \frac{s_2}{3}\left((s_3 - s_2)s_1 k_1 + (s_2 - s_1)s_3 k_2\right), \\
\mathcal{B}_3 = & \, (c_1 - c_3)(c_2 - c_1)(c_3 - c_2) \\
& + (c_3 - c_2)s_1 s_2 k_1 + (c_2 - c_1)s_2 s_3 k_2 - s_2 h k_3.
\end{aligned}
$$

Уравнение спектральной кривой при $n = 0$

Поскольку $n = 0$, то род спектральной кривой равен $g = 1$. Из уравнения спектральной кривой следует, что на ней существуют три бесконечно удаленные точки, в которых

$$\mu(\mathcal{P}) = \begin{cases} \frac{1}{3}(s_1 - s_2)\lambda + (c_1 - c_2) + O(\lambda^{-1}), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}^1_\infty, \\ \frac{1}{3}(s_2 - s_3)\lambda + (c_2 - c_3) + O(\lambda^{-1}), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}^2_\infty, \\ \frac{1}{3}(s_3 - s_1)\lambda + (c_3 - c_1) + O(\lambda^{-1}), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}^3_\infty. \end{cases}$$

Уравнение спектральной кривой при $n = 0$

Из асимптотики функции Ψ в окрестности бесконечно удаленных точек следует, что динамика конечнозонных решений трехволнового уравнения определяется b-периодами нормированных абелевых интегралов второго рода, имеющих следующие полюса в бесконечно удаленных точках

$$\Omega_\xi(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{i}{3}(s_1 - s_2)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^1, \\ \dfrac{i}{3}(s_2 - s_3)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^2, \\ \dfrac{i}{3}(s_3 - s_1)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^3, \end{cases}$$

Уравнение спектральной кривой при $n = 0$

$$\Omega_t(\lambda) = \begin{cases} \frac{i}{3}(b_1 - b_2)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^1, \\ \frac{i}{3}(b_2 - b_3)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^2, \\ \frac{i}{3}(b_3 - b_1)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^3, \end{cases}$$

$$\Omega_x(\lambda) = \begin{cases} \frac{i}{3}(a_1 - a_2)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^1, \\ \frac{i}{3}(a_2 - a_3)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^2, \\ \frac{i}{3}(a_3 - a_1)\lambda + O(1), & \mathcal{P} \to \mathcal{P}_\infty^3. \end{cases}$$

Уравнение спектральной кривой при $n = 0$

Легко видеть, что интеграл $\Omega_\xi(\mathcal{P}) - i\mu(\mathcal{P})$ не имеет полюсов и имеет нулевые a-периоды. Следовательно, его b-периоды также равны нулю. b-периоды остальны нормированных интегралов на кривой рода $g = 1$ линейно зависимы. Таким образом, при $n = 0$ амплитуды компонент решения зависят от линейной комбинации t, x и η и не зависят от ξ.

Отметим также, что при $s_j = a_j$ амплитуды компонент решения не будут зависеть от x, а при $s_j = b_j$ они не будут зависеть от t.

Подставляя в эволюционные уравнения выражения для функций $\mathcal{P}_j$, получаем

$$\partial_\eta u_{10} = \frac{-i}{s_1}\left(\left(9c_1^2 + 2s_1 s_2 k_1 - s_1 s_2 k_2\right) u_{10} - h v_{20} v_{30}\right),$$

$$\partial_\eta u_{20} = \frac{-i}{s_2}\left(\left(9c_2^2 - s_2^2 k_1 - s_2^2 k_2\right) u_{20} - h v_{30} v_{10}\right),$$

$$\partial_\eta u_{30} = \frac{-i}{s_3}\left(\left(9c_3^2 - s_2 s_3 k_1 + 2s_2 s_3 k_2\right) u_{30} - h v_{10} v_{20}\right),$$

$$\partial_\eta v_{10} = \frac{i}{s_1}\left(\left(9c_1^2 + 2s_1 s_2 k_1 - s_1 s_2 k_2\right) v_{10} - h u_{20} u_{30}\right),$$

$$\partial_\eta v_{20} = \frac{i}{s_2}\left(\left(9c_2^2 - s_2^2 k_1 - s_2^2 k_2\right) v_{20} - h u_{30} u_{10}\right),$$

$$\partial_\eta v_{30} = \frac{i}{s_3}\left(\left(9c_3^2 - s_2 s_3 k_1 + 2s_2 s_3 k_2\right) v_{30} - h u_{10} u_{20}\right).$$

Нетрудно проверить, что, если u_{j0} и v_{j0} удовлетворяют данным уравнениям, то решения системы трех волн имеют вид

$$u_j(x,t) = u_{j0}(\eta + \widehat{\theta}_0 x + \widetilde{\theta}_0 t)e^{i3c_j\xi + i\widetilde{\theta}_j t + i\widehat{\theta}_j x},$$
$$v_j(x,t) = v_{j0}(\eta + \widehat{\theta}_0 x + \widetilde{\theta}_0 t)e^{-i3c_j\xi - i\widetilde{\theta}_j t - i\widehat{\theta}_j x},$$

где η и ξ – вспомогательные переменные, $\widehat{\theta}_1 + \widehat{\theta}_2 + \widehat{\theta}_3 = 0$,

$$\widehat{\theta}_0 = \frac{a_2 s_1 - a_1 s_2}{h}, \quad \widetilde{\theta}_0 = \frac{b_2 s_1 - b_1 s_2}{h},$$
$$\widetilde{\theta}_1 = \frac{b_1\widehat{\theta}_1}{a_1} - \frac{9c_1^2 - s_1 s_2(k_2 - 2k_1)}{a_1 h}\kappa,$$
$$\widetilde{\theta}_2 = \frac{b_2\widehat{\theta}_2}{a_2} - \frac{9c_2^2 - s_2^2(k_1 + k_2)}{a_2 h}\kappa,$$
$$\widetilde{\theta}_3 = \frac{b_3\widehat{\theta}_3}{a_3} - \frac{9c_3^2 - s_2 s_3(k_1 - 2k_2)}{a_3 h}\kappa.$$

Заметим, что из этих формул следует, что при $s_j = a_j$ амплитуды решения зависят только от t, а при $s_j = b_j$ они зависят только от x.
Из условий вещественности вытекают следующие свойства параметров решений системы трех волн:

$$\widehat{\theta}_0^* = \sigma\widehat{\theta}_0, \quad \widetilde{\theta}_0^* = \sigma\widetilde{\theta}_0 \quad \text{и} \quad \widehat{\theta}_j \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{\theta}_j \in \mathbb{R}, \quad j \in \{1, 2, 3\}.$$

Вычисление функций u_{j0} и v_{j0}

Для нахождения функций $u_{j0}(\eta)$ и $v_{j0}(\eta)$ воспользуемся следующими равенствами

$$u_{j0} = \sqrt{\mathcal{P}_j}\exp\left\{-\int \frac{\widehat{w}_j d\eta}{\mathcal{P}_j}\right\}, \quad v_{j0} = \sqrt{\mathcal{P}_j}\exp\left\{\int \frac{\widehat{w}_j d\eta}{\mathcal{P}_j}\right\},$$

где $\widehat{w}_j = u_{j0}\partial_\eta v_{j0} - v_{j0}\partial_\eta u_{j0}$.
Подставляя в $\widehat{w}_j$ выражения для производных, получаем следующие соотношения

$$\widehat{w}_1 = 4is_1\mathcal{P}_1^2 - 2is_2\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 - 2is_3\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3 + 18i\frac{c_1^2}{s_1}\mathcal{P}_1 + \frac{ih}{s_1}(\widehat{A} - \widehat{B}),$$
$$\widehat{w}_2 = 4is_2\mathcal{P}_2^2 - 2is_1\mathcal{P}_1\mathcal{P}_2 - 2is_3\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3 + 18i\frac{c_2^2}{s_2}\mathcal{P}_2 + \frac{ih}{s_2}(\widehat{A} - \widehat{B}),$$
$$\widehat{w}_3 = 4is_3\mathcal{P}_3^2 - 2is_1\mathcal{P}_1\mathcal{P}_3 - 2is_2\mathcal{P}_2\mathcal{P}_3 + 18i\frac{c_3^2}{s_3}\mathcal{P}_3 + \frac{ih}{s_3}(\widehat{A} - \widehat{B})$$

Упрощая данные выражения, получаем

$$\widehat{w}_1 = \left(\frac{2(9c_1^2 + 2s_1 s_2 k_1 - s_1 s_2 k_2)}{s_1} + \frac{h^2}{s_1 s_2 s_3} \right) i\mathcal{P}_1 - \frac{i(k_1 - k_3)h^2}{s_1^2 s_3},$$

$$\widehat{w}_2 = \left(\frac{2(9c_2^2 - s_2^2 k_1 - s_2^2 k_2)}{s_2} + \frac{h^2}{s_1 s_2 s_3} \right) i\mathcal{P}_2 + \frac{i k_3 h^2}{s_1 s_2 s_3},$$

$$\widehat{w}_3 = \left(\frac{2(9c_3^2 - s_2 s_3 k_1 + 2s_2 s_3 k_2)}{s_3} + \frac{h^2}{s_1 s_2 s_3} \right) i\mathcal{P}_3 - \frac{i(k_2 - k_3)h^2}{s_1 s_3^2}.$$

Вычисление функций u_{j0} и v_{j0}

Из условий вещественности на постоянные s_j, c_j и k_j вытекают следующие соотношения

$$\mathcal{P}_j^* = \mathcal{P}_j, \quad \widehat{w}_j^* = -\sigma \widehat{w}_j, \quad \widehat{A}^* = -\sigma \widehat{B}.$$

Следовательно, функции u_{j0} и v_{j0} будут ограниченными при $\sigma = 1$ и экспоненциально возрастающими/убывающими при $\sigma = -1$. Полагая $\sigma = 1$, имеем $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = -1$, а также

$$a_j, b_j, s_j \in \mathbb{R}, \quad h \in \mathbb{R}$$

и

$$\widetilde{\theta}_0 \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\theta}_0 \in \mathbb{R}.$$

Для вычисления эллиптических интегралов воспользуемся следующими равенствами

$$\mathcal{P}_j(\eta) = -\frac{s_1 s_2 s_3}{s_j h^2} \left(\wp(\eta; g_2, g_3) - \wp(\alpha_j; g_2, g_3)\right),$$

где

$$\wp(\alpha_1; g_2, g_3) = \frac{h^2(2k_1 - k_2)}{3 s_1 s_3} - \frac{h^4}{12 s_1^2 s_2^2 s_3^2},$$

$$\wp(\alpha_2; g_2, g_3) = -\frac{h^2(k_1 + k_2)}{3 s_1 s_3} - \frac{h^4}{12 s_1^2 s_2^2 s_3^2},$$

$$\wp(\alpha_3; g_2, g_3) = \frac{h^2(2k_2 - k_1)}{3 s_1 s_3} - \frac{h^4}{12 s_1^2 s_2^2 s_3^2}.$$

Вычисление функций u_{j0} и v_{j0}

Пусть

$$\wp(\eta) = -\frac{h^2(k_1 + k_2 + a(\eta))}{3s_1 s_3} - \frac{h^4}{12 s_1^2 s_2^2 s_3^2}.$$

Тогда для $\wp'(\eta)$ выполняется следующее равенство

$$[\wp'(\eta)]^2 = -\frac{h^8(a(\eta) + 3k_3)^2}{9 s_1^4 s_2^2 s_3^4} - \frac{4h^6 a(\eta)(a(\eta) + 3k_1)(a(\eta) + 3k_2)}{27 s_1^3 s_3^3}.$$

Следовательно, поскольку $a(\alpha_2) = 0$, $a(\alpha_1) = -3k_1$, $a(\alpha_3) = -3k_2$, то

$$\wp'(\alpha_2) = \frac{ik_3 h^4}{s_1^2 s_2 s_3^2}, \quad \wp'(\alpha_1) = \frac{i(k_3 - k_1)h^4}{s_1^2 s_2 s_3^2}, \quad \wp'(\alpha_3) = \frac{i(k_3 - k_2)h^4}{s_1^2 s_2 s_3^2}.$$

Вычисляя эллиптические интегралы и упрощая, получаем следующие выражения для функций u_{j0} и v_{j0}:

$$u_{j0}(\eta) = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s_j h^2}} \frac{\sigma(\eta + \alpha_j)}{\sigma(\eta)\sigma(\alpha_j)} \exp\left\{-\frac{2\zeta(\alpha_j) + m_j}{2}\eta\right\},$$

$$v_{j0}(\eta) = \sqrt{\frac{s_1 s_2 s_3}{s_j h^2}} \frac{\sigma(\eta - \alpha_j)}{\sigma(\eta)\sigma(\alpha_j)} \exp\left\{\frac{2\zeta(\alpha_j) + m_j}{2}\eta\right\},$$

где

$$m_1 = i\left(\frac{2(9c_1^2 + 2s_1 s_2 k_1 - s_1 s_2 k_2)}{s_1} + \frac{h^2}{s_1 s_2 s_3}\right),$$

$$m_2 = i\left(\frac{2(9c_2^2 - s_2^2 k_1 - s_2^2 k_2)}{s_2} + \frac{h^2}{s_1 s_2 s_3}\right),$$

$$m_3 = i\left(\frac{2(9c_3^2 - s_2 s_3 k_1 + 2s_2 s_3 k_2)}{s_3} + \frac{h^2}{s_1 s_2 s_3}\right).$$

Пример точного решения системы трех волн

Рассмотрим случай $k_3 = k_1$, и введем обозначение ($s_1 > 0$, $s_3 < 0$, $s_2 = -s_1 - s_3 > 0$):

$$\hat{s} = -4 s_1 s_2^2 s_3, \quad \hat{s} > 0$$

Тогда имеем

$$0 = \wp'(\omega_j) = (a(\omega_j) + 3k_1) \left(-3h^2(a(\omega_j) + 3k_1) + a(\omega_j)(a(\omega_j) + 3k_2)\hat{s}\right).$$

Рассмотрим дискриминант второго множителя данного уравнения:

$$D_1 = 9((h^2 - k_2\hat{s})^2 + 4h^2 k_1 \hat{s}).$$

Т.е уравнение на $a(\omega_j)$ будет иметь 3 различных вещественных корня, когда $D_1 = \hat{D}_1^2 > 0$. В этом случае, параметр k_1 удовлетворяет следующему соотношению

$$k_1 = \frac{\hat{D}_1^2 - 9(h^2 - k_2\hat{s})^2}{36 h^2 \hat{s}}.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае выполняются следующие соотношения

$$a(\omega_1) = \frac{3h^2 - 3k_2\hat{s} + \hat{D}_1}{2\hat{s}},$$

$$a(\omega_2) = \frac{3h^2 - 3k_2\hat{s} - \hat{D}_1}{2\hat{s}},$$

$$a(\omega_3) = -3k_1 = \frac{9(h^2 - k_2\hat{s})^2 - \hat{D}_1^2}{12h^2\hat{s}} = \frac{\hat{s}a(\omega_1)a(\omega_2)}{3h^2}.$$

И, следовательно:

$$e_1 = \wp(\omega_1) = \frac{\hat{D}_1^2 + 18\hat{D}_1 h^2 + 9h^4}{432 s_1^2 s_2^2 s_3^2} - \frac{k_2^2 s_2^2}{3},$$

$$e_2 = \wp(\omega_2) = \frac{\hat{D}_1^2 - 18\hat{D}_1 h^2 + 9h^4}{432 s_1^2 s_2^2 s_3^2} - \frac{k_2^2 s_2^2}{3},$$

$$e_3 = \wp(\omega_3) = -\frac{\hat{D}_1^2 + 9h^4}{216 s_1^2 s_2^2 s_3^2} + \frac{2k_2^2 s_2^2}{3}.$$

Пример точного решения системы трех волн

Неравенство $e_1 > e_2 > e_3$ выполняется при

$$(3h^2 - \hat{D}_1)^2 > (3k_2\hat{s})^2.$$

Вычисляя для этого случая $\wp(\alpha_j)$, имеем:

$$\wp(\alpha_1) = -\frac{\hat{D}_1^2 + 9h^4}{216 s_1^2 s_2^2 s_3^2} + \frac{2k_2^2 s_2^2}{3} = e_3,$$

$$\wp(\alpha_{2,3}) = \frac{\hat{D}_1^2 - 45h^4}{432 s_1^2 s_2^2 s_3^2} \mp \frac{h^2 k_2}{2 s_1 s_3} - \frac{k_2^2 s_2^2}{3}.$$

Неравенство $\wp(\alpha_{2,3}) < \wp(\alpha_1) = e_3$ выполняется при

$$k_2^2 s_2^2 > \frac{\hat{D}_1^2 - 9h^4}{144 s_1^2 s_2^2 s_3^2} \mp \frac{h^2 k_2}{2 s_1 s_3}.$$

Оба неравенства выполняются при условии

$$3h^2 - \hat{D}_1 > |3k_2\hat{s}|.$$

Пример точного решения системы трех волн

Чтобы построить вырожденное решение, положим $\hat{D}_1 = 0$.
В результате получим

$$k_1 = -\frac{(h^2 - k_2\hat{s})^2}{4h^2\hat{s}}.$$

В этом случае функция $a(\eta)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$[a'(\eta)]^2 = -\frac{4h^2}{3s_1s_3}(a(\eta) - \widetilde{A})^2 \left(a(\eta) - \frac{\hat{s}\widetilde{A}^2}{3h^2}\right),$$

где

$$\widetilde{A} = \frac{3(h^2 - k_2\hat{s})}{2\hat{s}}.$$

Пример точного решения системы трех волн

Решение $a(\eta)$ зависит от знака $\widetilde{A}$. Если $\widetilde{A} > 0$, то решение выражается через гиперболический тангенс, а если $\widetilde{A} < 0$, то через тригонометрический. Полагая, что $\widetilde{A} > 0$ или $h^2 > k_2 \hat{s}$, имеем

$$a(\eta) = \frac{3(h^4 - k_2^2 \hat{s}^2)}{4h^2 \hat{s}} \tanh^2(\hat{k}\eta) + \frac{3(h^2 - k_2 \hat{s})^2}{4h^2 \hat{s}},$$

где

$$\hat{k} = \frac{s_2 \sqrt{h^4 - k_2^2 \hat{s}^2}}{\hat{s}}.$$

Пример точного решения системы трех волн

Вычисляя выражения для u_{j0} и v_{j0}, имеем

$$u_{10}(\eta) = \frac{r_1(h^2 + k_2\hat{s})}{4h\phi_1\sqrt{-s_1^2 s_2 s_3}} \tanh(\hat{k}\eta) \exp\left\{-\frac{9ic_1^2}{s_1}\eta - \frac{i(5h^4 + k_2^2\hat{s}^2)}{8h^2 s_1 s_2 s_3}\eta\right\},$$

$$u_{20}(\eta) = \frac{r_1(h^2 + k_2\hat{s})}{4h\phi_2\sqrt{-s_1 s_2^2 s_3}}(r_1 - i\tanh(\hat{k}\eta))$$

$$\times \exp\left\{-\frac{9ic_2^2}{s_2}\eta - \frac{i(3h^4 + 10h^2 k_2\hat{s} - k_2^2\hat{s}^2)}{16h^2 s_1 s_2 s_3}\eta\right\},$$

$$u_{30}(\eta) = -\frac{ir_1(h^2 + k_2\hat{s})}{4h\phi_3\sqrt{s_1 s_2 s_3^2}}(r_1^{-1} - i\tanh(\hat{k}\eta))$$

$$\times \exp\left\{-\frac{9ic_3^2}{s_3}\eta - \frac{i(3h^4 - 10h^2 k_2\hat{s} - k_2^2\hat{s}^2)}{16h^2 s_1 s_2 s_3}\eta\right\},$$

Пример точного решения системы трех волн

где $v_{j0} = \sigma_j u_{j0}^*$, $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$, $\sigma_3 = -1$.
Дополнительные параметры удовввлетворяют следующим условиям

$$r_1 = \frac{\sqrt{(h^2 - k_2\hat{s})}}{\sqrt{(h^2 + k_2\hat{s})}},$$

$|\phi_j| = 1$, $\phi_1\phi_2\phi_3 = 1$.

Спасибо за внимание

Исследование выполнено при финансовой поддержке
Российского научного фонда (соглашение No 22-11-00196)