Прогнозирование траекторий динамических систем на длительный период методами машинного обучения

Царев С.П.[1]

[1]Сибирский федеральный университет,
Красноярск

Конференция «Геометрия, топология и математическая физика»
памяти Сергея Петровича Новикова
2025-06-05

План:

- Мотивация & формализация:
  - требуется высокая точность (9-10 десятичных знаков);
  - богатство геометрических методов и методов машинного обучения

План:

- Мотивация & формализация:
  - требуется высокая точность (9-10 десятичных знаков);
  - богатство геометрических методов и методов машинного обучения
- В данной лекции:
  - методы редукции размерности
  - sparse recovery & compressive sensing

План:

- Мотивация & формализация:
  - требуется высокая точность (9-10 десятичных знаков);
  - богатство геометрических методов и методов машинного обучения
- В данной лекции:
  - методы редукции размерности
  - sparse recovery & compressive sensing
- https://forum.mathmeth.ru
  (Лекции по матем. методам в приложении к ГНСС, 2023 г.)

План:

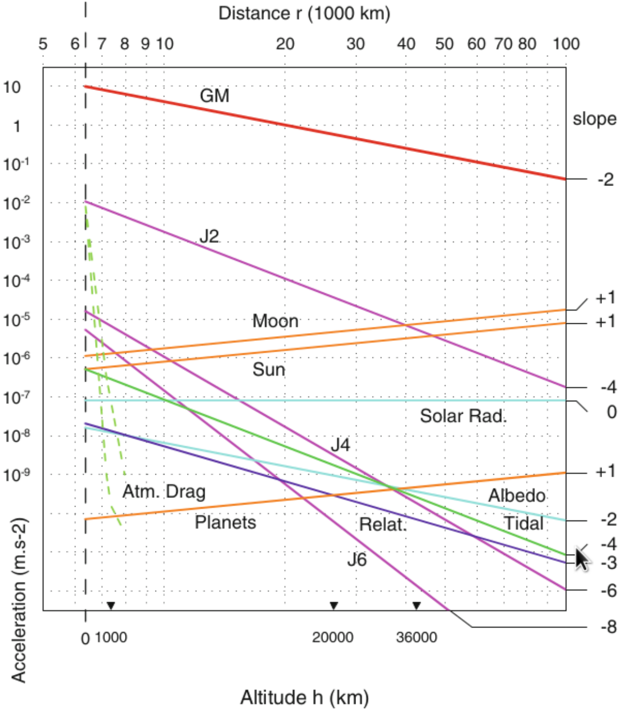
- Мотивация & формализация:
  - требуется высокая точность (9-10 десятичных знаков);
  - богатство геометрических методов и методов машинного обучения
- В данной лекции:
  - методы редукции размерности
  - sparse recovery & compressive sensing
- https://forum.mathmeth.ru
  (Лекции по матем. методам в приложении к ГНСС, 2023 г.)
- Вне рамок лекции:
  - Topological data analysis (TDA)
  - теория функций *очень* многих переменных
    и пространств очень большой размерности

Действующие на спутники силы и их эффект

Таблица 10.1

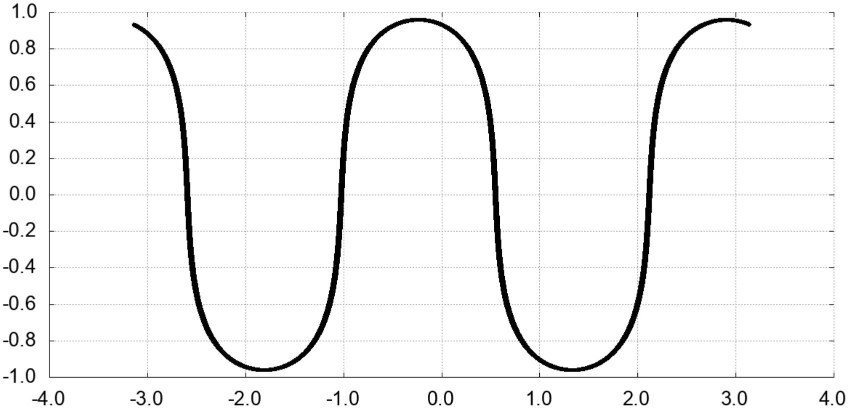
Влияние различных факторов на движение НИСЗ

Возмущающие факторы	Максимальное возмущающее ускорение, м/с^2	Максимальное возмущение за 1^h, м
Центральное поле Земли	$5{,}65 \cdot 10^{-1}$	—
Вторая зональная гармоника	$5{,}3 \cdot 10^{-5}$	300
Гравитация Луны	$5{,}5 \cdot 10^{-6}$	40
Гравитация Солнца	$3 \cdot 10^{-6}$	20
Четвертая зональная гармоника	10^{-7}	0,6
Солнечная радиация	10^{-7}	0,6
Гравитационные аномалии	10^{-8}	0,06
Другие силы	10^{-8}	0,06

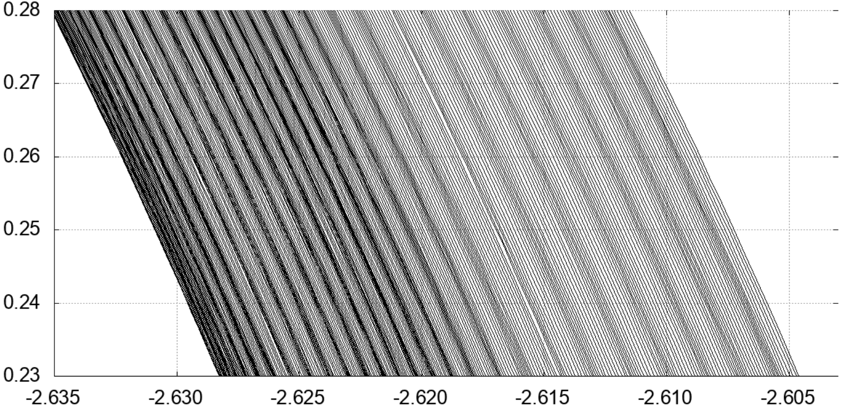


Distance r (1000 km)
5
6
7
8
9
10
20
30
40
50
60
70
80
100
10
1
10-1
10-2
10-3
10-4
10-5
10-6
10-7
10-8
10-9
GM
slope
-2
J2
+1
+1
Moon
Sun
-4
Solar Rad.
0
J4
+1
Atm. Drag
Albedo
Planets
Relat.
Tidal
-2
-4
-3
J6
-6
-8
0
1000
20000
36000
Acceleration (m.s-2)
Altitude h (km)

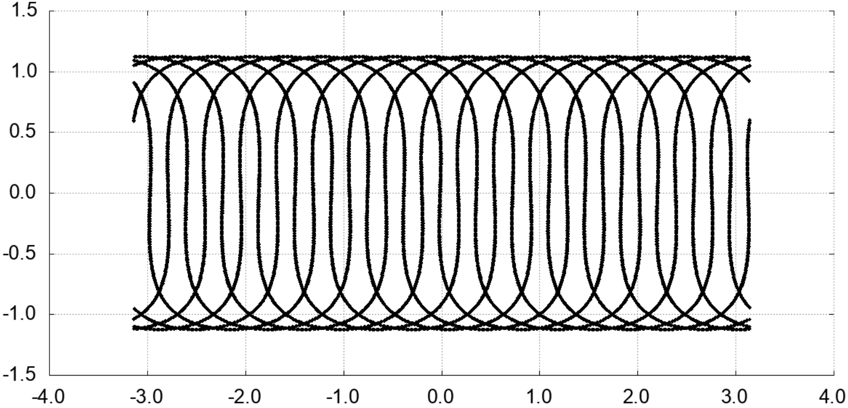
Проекция орбиты G01 (GPS) на поверхность Земли (2013)



Проекция орбиты G01 (GPS) (2013) в увеличенном виде



Проекция орбиты R01 (GLONASS) на поверхность Земли (2013)



Дискретизация траекторий и редукция размерности

Дискретизация траекторий и редукция размерности

Сколько точек надо задать на суточном участке орбиты, чтобы можно было легко восстановить все промежуточные положения?

Дискретизация траекторий и редукция размерности

Сколько точек надо задать на суточном участке орбиты, чтобы можно было легко восстановить все промежуточные положения?

Достаточно задать 96 точек (положения спутника через каждые 15 мин) — промежуточные восстанавливаются с точностью 1 мм полиномиальной интерполяцией по 12 соседним точкам.

Дискретизация траекторий и редукция размерности

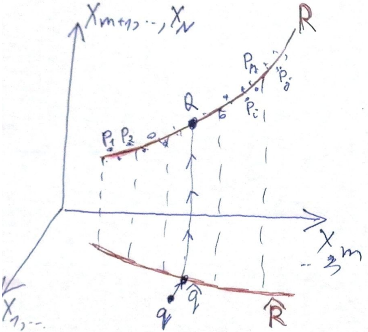
Сколько точек надо задать на суточном участке орбиты, чтобы можно было легко восстановить все промежуточные положения?

Достаточно задать 96 точек (положения спутника через каждые 15 мин) — промежуточные восстанавливаются с точностью 1 мм полиномиальной интерполяцией по 12 соседним точкам.

Простейшая идея редукции размерности:

- задать суточную траекторию как 288-мерный ($288 = 96*3$) вектор, соотв. недельный отрезок дает 2016-мерный вектор;
- рассмотреть множество таких «недельных векторов» за длительный период;
- Найти подмногообразие в $\mathbb{R}^{2016}$ меньшей размерности, содержащее полученный набор точек (или очень близкое к нему);
- использовать для прогноза орбит на следующие несколько суток (недель, месяцев).

Прогноз траекторий методом редукции размерности



$X_1,..,X_m$ – координаты точек начального (заданного) участка орбиты

$X_{m+1},..,X_N$ – координаты точек прогнозируемого участка орбиты

P_i – (с координатами $X_1,..,X_N$) – точки „обучающего" набора орбит (начало + прогноз из SP3 данных)

R – редуцированное многообразие размерности $\underline{k<m}$, приближающее точки P_i

$\hat{R}$ – проекция R на подпр-во $(X_1,..,X_m)$

q – (коорд. $q_1,..,q_m$) – начальный участок орбиты, которую хотим продолжить (прогнозировать)

$\hat{q}$ – ее проекция на $\hat{R}$

Q – обратная проекция $\hat{q}$ на R, координаты $Q_{m+1},..,Q_N$ дают прогноз для участка q

Простейшая редукция: метод главных компонент (линейный PCA), суточные траектории

размерность	max, км	СКО, км
10	4.402e-03	4.781e-04
15	5.351e-04	6.344e-05
20	5.712e-05	1.136e-05
25	9.410e-06	2.057e-06
30	4.219e-06	5.871e-07

Простейшая редукция: метод главных компонент (линейный PCA), недельные траектории

размерность	max, км	СКО, км
10	4.872e-02	6.178e-03
15	1.122e-02	1.133e-03
20	1.103-03	1.715e-04
25	2.752-04	4.079e-05
30	7.680-05	1.293e-05

Слабонелинейные подмногообразия, задание функций (очень) многих переменных и методы sparse recovery

Попробуем задать нелинейное подмногобразие, например полиномами многих переменных степени 2.

Слабонелинейные подмногообразия, задание функций (очень) многих переменных и методы sparse recovery

Попробуем задать нелинейное подмногобразие, например полиномами многих переменных степени 2.

Какое количество коэффициентов при этом необходимо найти — методом машинного обучения?

Слабонелинейные подмногообразия, задание функций (очень) многих переменных и методы sparse recovery

Попробуем задать нелинейное подмногобразие, например полиномами многих переменных степени 2.

Какое количество коэффициентов при этом необходимо найти — методом машинного обучения?

У нас НЕТ такого количества данных! (Хотя их немало)

Слабонелинейные подмногообразия, задание функций (очень) многих переменных и методы sparse recovery

Попробуем задать нелинейное подмногобразие, например полиномами многих переменных степени 2.

Какое количество коэффициентов при этом необходимо найти — методом машинного обучения?

У нас НЕТ такого количества данных! (Хотя их немало)

Выход: задавать лишь небольшое число ненулевых слагаемых в полиноме многих переменных.

Слабонелинейные подмногообразия, задание функций (очень) многих переменных и методы sparse recovery

Попробуем задать нелинейное подмногобразие, например полиномами многих переменных степени 2.

Какое количество коэффициентов при этом необходимо найти — методом машинного обучения?

У нас НЕТ такого количества данных! (Хотя их немало)

Выход: задавать лишь небольшое число ненулевых слагаемых в полиноме многих переменных.
Какие мономы отобрать для наилучшего приближения?

Слабонелинейные подмногообразия, задание функций (очень) многих переменных и методы sparse recovery

Попробуем задать нелинейное подмногобразие, например полиномами многих переменных степени 2.

Какое количество коэффициентов при этом необходимо найти — методом машинного обучения?

У нас НЕТ такого количества данных! (Хотя их немало)

Выход: задавать лишь небольшое число ненулевых слагаемых в полиноме многих переменных.
Какие мономы отобрать для наилучшего приближения?
Один из методов: sparse recovery.
Задача сводится к решению недоопределенной линейной системы на большое число неизвестных коэффициентов при мономах, так, чтобы лишь небольшое число неизвестных коэффициентов остались ненулевыми.

Теоретическая постановка задачи (ver. 1)

Простейшая линейная система с числом уравнений, *меньшим*, чем число неизвестных, при условии, что лишь *небольшое* число неизвестных — ненулевые (но неизвестно, какие!):

$$\hat{A} \cdot x = b \tag{1}$$

Теоретическая постановка задачи (ver. 1)

Простейшая линейная система с числом уравнений, *меньшим*, чем число неизвестных, при условии, что лишь *небольшое* число неизвестных — ненулевые (но неизвестно, какие!):

$$\hat{A} \cdot x = b \tag{1}$$

В практических приложениях, система должна решаться приближенно:

$$\|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \tag{2}$$

Теоретическая постановка задачи (ver. 1)

Простейшая линейная система с числом уравнений, *меньшим*, чем число неизвестных, при условии, что лишь *небольшое* число неизвестных — ненулевые (но неизвестно, какие!):

$$\hat{A} \cdot x = b \tag{1}$$

В практических приложениях, система должна решаться приближенно:

$$\|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \tag{2}$$

Метод LASSO (1990-е) предлагает минимизировать L_1-норму искомого вектора x:

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \sum_{i=1}^{N} |x_i|, \quad \text{при условии} \\ \|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \end{cases} \tag{3}$$

Теоретическая постановка задачи (ver. 1)

Простейшая линейная система с числом уравнений, *меньшим*, чем число неизвестных, при условии, что лишь *небольшое* число неизвестных — ненулевые (но неизвестно, какие!):

$$\hat{A} \cdot x = b \tag{1}$$

В практических приложениях, система должна решаться приближенно:

$$\|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \tag{2}$$

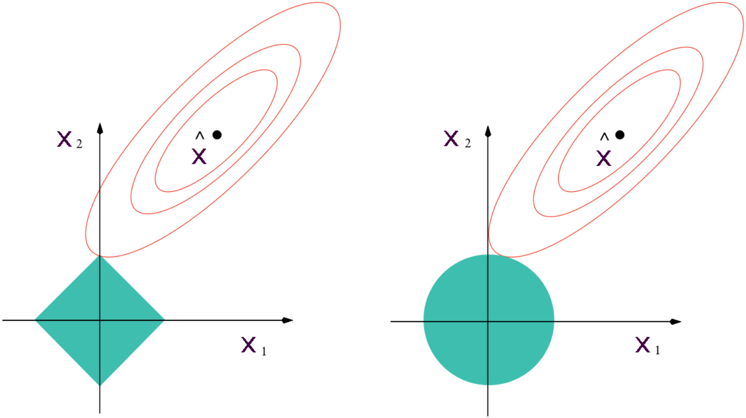
Метод LASSO (1990-е) предлагает минимизировать L_1-норму искомого вектора x:

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \sum_{i=1}^{N} |x_i|, \quad \text{при условии} \\ \|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \end{cases} \tag{3}$$

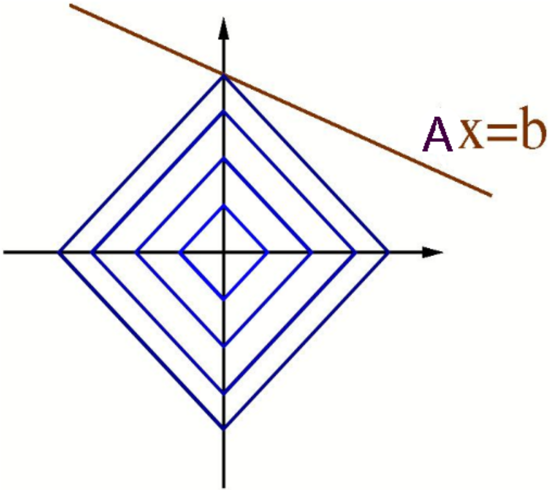
либо объединить оба условия:

$$x = \arg\min_x \left\{ \sum_{i=1}^{N} |x_i| + \lambda \cdot \|\hat{A} \cdot x - b\|_2 \right\} \tag{4}$$

Геометрическая картина (2×2) (эффект разреженности для L_1-нормы)



Геометрическая картина (1×2) (эффект разреженности для L_1-нормы)



Определения

Задача (P0) *NP-hard* !!

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \{\|x\|_0 = \#(x_k \neq 0)\}, & \text{при условии} \\ \hat{A} \cdot x = b \end{cases}$$

Задача (P0ε) *NP-hard* !!

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \{\|x\|_0 = \#(x_k \neq 0)\}, & \text{при условии} \\ \|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \end{cases}$$

Задача (P1)

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|\}, & \text{при условии} \\ \hat{A} \cdot x = b \end{cases}$$

Задача (P1ε)

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \{\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{N} |x_i|\}, & \text{при условии} \\ \|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \end{cases}$$

Теоретические результаты: Sparse Recovery and RIP

Restricted Isometry Property of Order k [Candès, Romberg, Tao (2006)]:
Let δ_k be the smallest number such that

$$(1-\delta_k)\|x\|_2^2 \leq \|\hat{A}x\|_2^2 \leq (1+\delta_k)\|x\|_2^2$$

for all k-sparse vectors $x \in \mathbb{R}^n$ where $\hat{A} = [a_1 \dots a_n] \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Теорема (E.J.Candès (2008))

If $\delta_{2k} < \sqrt{2}-1$, then for all k-sparse vectors x such that $\hat{A}x = b$, the solution of (P1) is equal to the solution of (P0).

Упражнения

L_2 **vs** L_1 **в статистике**: «средние» значения $(dim = 1)$

Пусть имеется выборка $x_1, \dots x_n$.

$$x_{average2} = \arg\min_{x^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x^*)^2 \right\}$$

$x_{average2}$ — среднее арифметическое, *неустойчива к «выбросам»*

Упражнения

L_2 **vs** L_1 **в статистике**: «средние» значения $(dim = 1)$

Пусть имеется выборка $x_1, \ldots x_n$.

$$x_{average2} = \arg\min_{x^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x^*)^2 \right\}$$

$x_{average2}$ — среднее арифметическое, *неустойчива к «выбросам»*

$$x_{average1} = \arg\min_{x^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - x^*| \right\}$$

$x_{average1}$ — медиана (почти...), *устойчива к «выбросам»*

Упражнения

L_2 **vs** L_1 **в статистике**: «средние» значения $(dim = 1)$

Пусть имеется выборка $x_1, \ldots x_n$.

$$x_{average2} = \arg\min_{x^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - x^*)^2 \right\}$$

$x_{average2}$ — среднее арифметическое, *неустойчива к «выбросам»*

$$x_{average1} = \arg\min_{x^*} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |x_i - x^*| \right\}$$

$x_{average1}$ — медиана (почти...), *устойчива к «выбросам»*

$x_{average2}$: линейная оценка, $x_{average1}$: *нелинейная*.

Пример приложения Compressive sensing (томография)

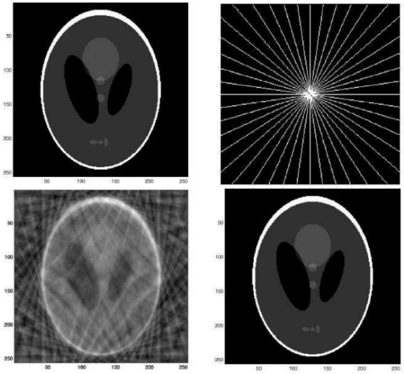


Figure 1: When Fourier coefficients of a testbed medical image known as the Logan–Shepp phantom (top left) are sampled along 22 radial lines in the frequency domain (top right), a naive, "minimal energy" reconstruction setting unobserved Fourier coefficients to 0 is marred by artifacts (bottom left). ℓ_1-reconstruction (bottom right) is exact.

Пример приложения Compressive sensing (томография)

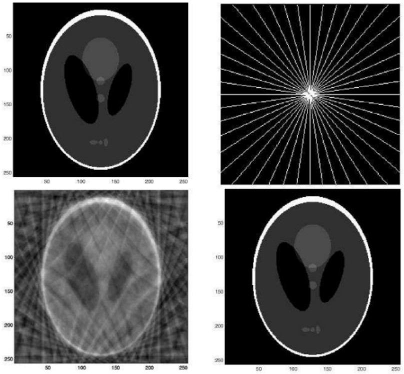
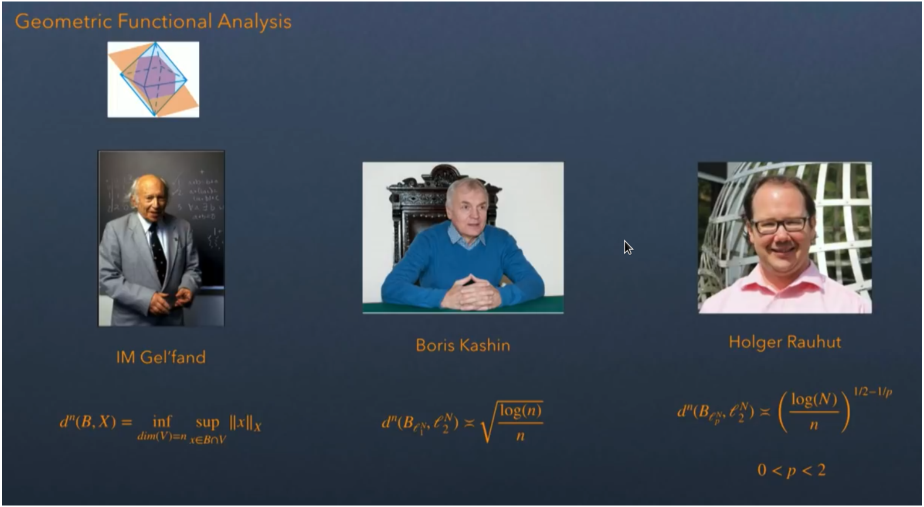


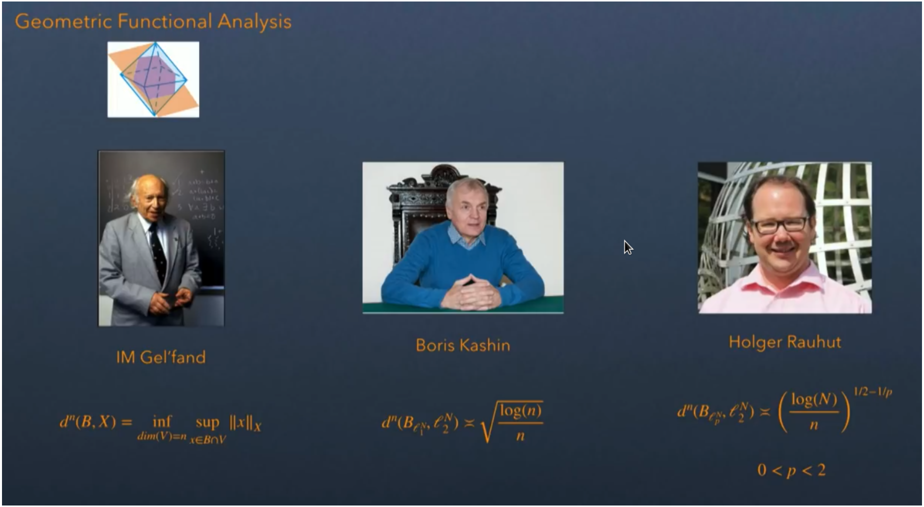
Figure 1: When Fourier coefficients of a testbed medical image known as the Logan–Shepp phantom (top left) are sampled along 22 radial lines in the frequency domain (top right), a naive, "minimal energy" reconstruction setting unobserved Fourier coefficients to 0 is marred by artifacts (bottom left). ℓ_1-reconstruction (bottom right) is exact.

Размерность вектора данных (количество пикселей): $> 10^5$!!

Лекция D.Donoho (премия Гаусса 2018)

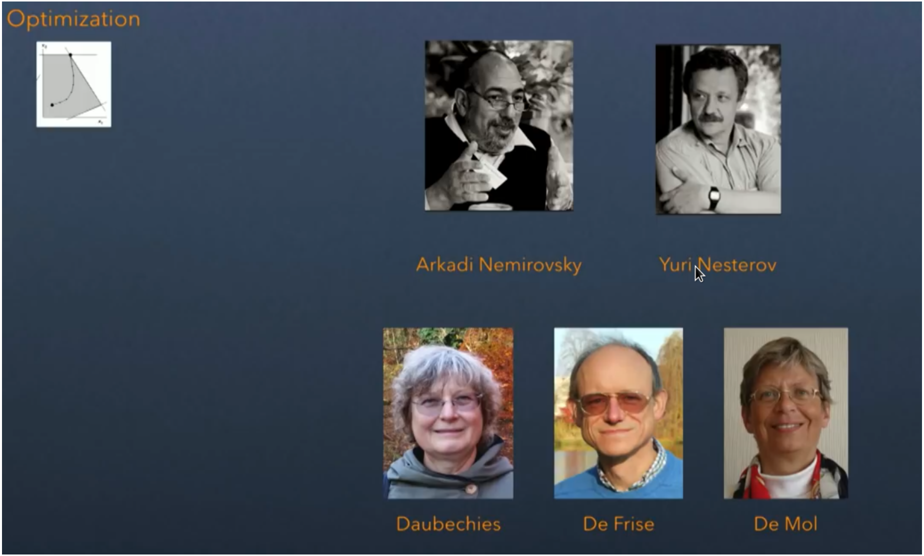


Лекция D.Donoho (премия Гаусса 2018)



Achtung: $0 < p < 2$!!

Лекция D.Donoho (премия Гаусса 2018)



Теоретическая постановка задачи (вер. 2)

Проблема построения CS-матрицы

Для неизвестного многомерного *разреженного* вектора x найти хорошую «матрицу измерений» $\hat{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ с *малым* m такую, что по имеющимся «измерениям» $\hat{A}x = b$, решая разреженную задачу можно найти x.

Теоретическая постановка задачи (вер. 2)

Проблема построения CS-матрицы

Для неизвестного многомерного *разреженного* вектора x найти хорошую «матрицу измерений» $\hat{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ с *малым* m такую, что по имеющимся «измерениям» $\hat{A}x = b$, решая разреженную задачу можно найти x.

Известные конструкции: случайные матрицы (!!!) дают $k \leq Cm/\log(n/m)$.

Теорема (Candès-Romberg-Tao, 2004)

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \{1, \ldots, n\}$ выбраны случайно. Тогда с высокой вероятностью каждый k-разреженный сигнал $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{C}$ может быть восстановлен из $\hat{f}(\xi_1), \ldots, \hat{f}(\xi_m)$, если $m > Ck \log n$ для некоторой абсолютной константы C.

Численные эксперименты показывают, что на практике большинство k-разреженных сигналов фактически восстанавливаются примерно при $m \geq 4k$.

Теоретическая постановка задачи (вер. 2)

Пример «хорошей» случайной CS-матрицы:

Лемма (Лемма Джонсона-Линденштрауса (вер. 1))

Даны $\varepsilon \in (0,1)$, *множество* X *из* m *точек в* $\mathbb{R}^N$ *и целое число* n, *такое что* $n > C \ln m/\varepsilon^2$, *тогда существует линейное отображение (случайная ортогональная проекция)* $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ *такое, что*

$$(1-\varepsilon)\|u-v\|_2 \le \|\Phi(u)-\Phi(v)\|_2 \le (1+\varepsilon)\|u-v\|_2, \quad \forall u,v \in X.$$

Лемма (Лемма Джонсона-Линденштрауса (вер. 2))

Для любого целого числа $d > 0$ *и любых* $0 < \varepsilon, \delta < 1/2$ *существует распределение вероятностей на* $k \times d$ *действительных матрицах для* $k = \Theta(\varepsilon^{-2} \log(1/\delta))$ *такое, что для любого* $x \in \mathbb{R}^d$ *с* $\|x\|^2 = 1$,

$$\mathrm{Prob}_S\left[\left|\|Sx\|_2^2 - 1\right| > \varepsilon\right] < \delta.$$

Насколько хороши случайные матрицы?

Мысленный эксперимент: при заданном m попробуем максимально увеличить n, выбирая случайные векторы. Два таких столбца практически ортогональны: корреляция ($=$ скал. произведение) мала. Редкие случайно коррелирующие столбцы отбрасываем.

Насколько хороши случайные матрицы?

Мысленный эксперимент: при заданном m попробуем максимально увеличить n, выбирая случайные векторы. Два таких столбца практически ортогональны: корреляция ($=$ скал. произведение) мала. Редкие случайно коррелирующие столбцы отбрасываем.

С точки зрения (наивной) статистики, такой процесс наращивания n бесконечен … Что противоречит (наивной) геометрии: количество почти ортогональных векторов в $\mathbb{R}^m$ конечно.

Насколько хороши случайные матрицы?

Мысленный эксперимент: при заданном m попробуем максимально увеличить n, выбирая случайные векторы. Два таких столбца практически ортогональны: корреляция ($=$ скал. произведение) мала. Редкие случайно коррелирующие столбцы отбрасываем.

С точки зрения (наивной) статистики, такой процесс наращивания n бесконечен … Что противоречит (наивной) геометрии: количество почти ортогональных векторов в $\mathbb{R}^m$ конечно.

Статистика плохо работает при *очень больших* выборках?
Или есть пояснение причины этого парадокса?

Насколько хороши случайные матрицы?

Мысленный эксперимент: при заданном m попробуем максимально увеличить n, выбирая случайные векторы. Два таких столбца практически ортогональны: корреляция ($=$ скал. произведение) мала. Редкие случайно коррелирующие столбцы отбрасываем.

С точки зрения (наивной) статистики, такой процесс наращивания n бесконечен … Что противоречит (наивной) геометрии: количество почти ортогональных векторов в $\mathbb{R}^m$ конечно.

Статистика плохо работает при *очень больших* выборках?
Или есть пояснение причины этого парадокса?

А насколько велико количество почти ортогональных векторов в $\mathbb{R}^m$?

Насколько хороши случайные матрицы?

Мысленный эксперимент: при заданном m попробуем максимально увеличить n, выбирая случайные векторы. Два таких столбца практически ортогональны: корреляция ($=$ скал. произведение) мала. Редкие случайно коррелирующие столбцы отбрасываем.

С точки зрения (наивной) статистики, такой процесс наращивания n бесконечен ... Что противоречит (наивной) геометрии: количество почти ортогональных векторов в $\mathbb{R}^m$ конечно.

Статистика плохо работает при *очень больших* выборках?
Или есть пояснение причины этого парадокса?

А насколько велико количество почти ортогональных векторов в $\mathbb{R}^m$?

Парадоксальный недавний результат:
Количество векторов единичной длины в $\mathbb{R}^m$, скал. произведения которых по модулю не более заданного малого δ, *экспоненциально* растет при увеличении m:
Kainen, Paul C., and Věra Kůrková.
Quasiorthogonal dimension of Euclidean spaces. Applied math letters, 6(3) (1993), p. 7–10.

Обработка сигналов и изображений, сверхразрешение и т. д. (версия 3, 4, . . . , N)

Актуальная проблема: *Детерминированное* построение CS-матриц: поперечники Гельфанда, . . .

Обработка сигналов и изображений, сверхразрешение и т. д. (версия 3, 4, . . . , N)

Актуальная проблема: *Детерминированное* построение CS-матриц: поперечники Гельфанда, . . .

«Преодоление предела Найквиста-Котельникова», сверхразрешение и повышение резкости изображений, . . .

Обработка сигналов и изображений, сверхразрешение и т. д. (версия 3, 4, . . . , N)

Актуальная проблема: *Детерминированное* построение CS-матриц: поперечники Гельфанда, . . .

«Преодоление предела Найквиста-Котельникова», сверхразрешение и повышение резкости изображений, . . .

Пример: the twelve coins puzzle:
имея двенадцать монет, одна из которых фальшивая (и, следовательно, тяжелее или легче других), можно определить фальшивую монету всего за три взвешивания, взвешивая монеты в надлежащим образом выбранных партиях.

Ключевым моментом является то, что поддельные монеты — разрежены (в ряду настоящих)!

Обработка сигналов и изображений, сверхразрешение и т. д. (версия 3, 4, . . . , N)

Актуальная проблема: *Детерминированное* построение CS-матриц: поперечники Гельфанда, . . .

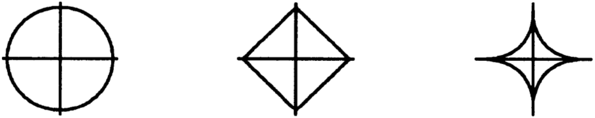
«Преодоление предела Найквиста-Котельникова», сверхразрешение и повышение резкости изображений, . . .

Пример: the twelve coins puzzle:
имея двенадцать монет, одна из которых фальшивая (и, следовательно, тяжелее или легче других), можно определить фальшивую монету всего за три взвешивания, взвешивая монеты в надлежащим образом выбранных партиях.

Ключевым моментом является то, что поддельные монеты — разрежены (в ряду настоящих)!

Как найти «хорошую матрицу взвешиваний» ($a_{ij} \in \{0,1\}$) с небольшим m и большим n. (ОТК на массовом производстве)?

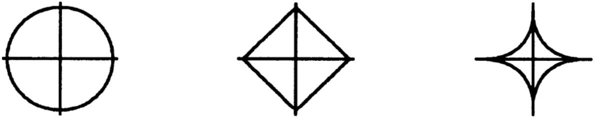
Невыпуклые задачи (ver. $N+1$, $N+2$, ...)



Задача ($\mathrm{P}_p^{\varepsilon}$), $0 < p < 1$

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \{\|x\|_p = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^p\}, \quad \text{restricted by} \\ \|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \end{cases}$$

Невыпуклые задачи (ver. $N+1$, $N+2$, ...)



Задача ($\mathbf{P}_p^\varepsilon$), $0 < p < 1$

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \{ \|x\|_p = \sum_{i=1}^{N} |x_i|^p \}, & \text{restricted by} \\ \|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \end{cases}$$

Задача ($\mathbf{TV}_p^\varepsilon$), $0 < p \leq 1$ для *total variation* (полной вариации)

$$\begin{cases} x = \arg\min_x \{ TV_p(x) = \sum_{i=1}^{N-1} |x(t_{i+1}) - x(t_i)|^p \}, & \text{restricted by} \\ \|\hat{A} \cdot x - b\|_2 < \varepsilon \end{cases}$$

Эта задача очень популярна при сегментации изображений, поиске и сглаживании резких границ и т. д.

References

- Rudin LI, Osher S, Fatemi E. *Nonlinear total variation based noise removal algorithms* // Physica D: nonlinear phenomena. 1992 Nov 1;60(1-4):259-68.
- Hastie, T., Tibshirani, R., Wainwright, M. *Statistical learning with sparsity: The Lasso and generalizations*. (2015).
- Donoho D.L. *Compressed sensing* // IEEE Trans Inform Theory, v. 52, 1289–1306. 2006.
- Candes E.J., Romberg J.K., Tao T. *Stable signal recovery from incomplete and inaccurate measurements* // Comm Pure Appl Math, 2006. v. 59. No. 8. 1207–1223.
- Candes EJ, Fernandez-Granda C. *Super-resolution from noisy data* // J Fourier Anal Appl. 2013, 1229–54
- А.С. Пустошилов, С.П. Царев *Обнаружение разрывов в фазовых измерениях одночастотных навигационных приемников при различной нестабильности опорных генераторов* // Ural Radio Engineering Journal. 2021. No 5(2). С. 144–161.