О задаче Новикова в физике двумерных систем

А.Я. Мальцев
Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

Конференция

"Геометрия, топология и математическая физика"

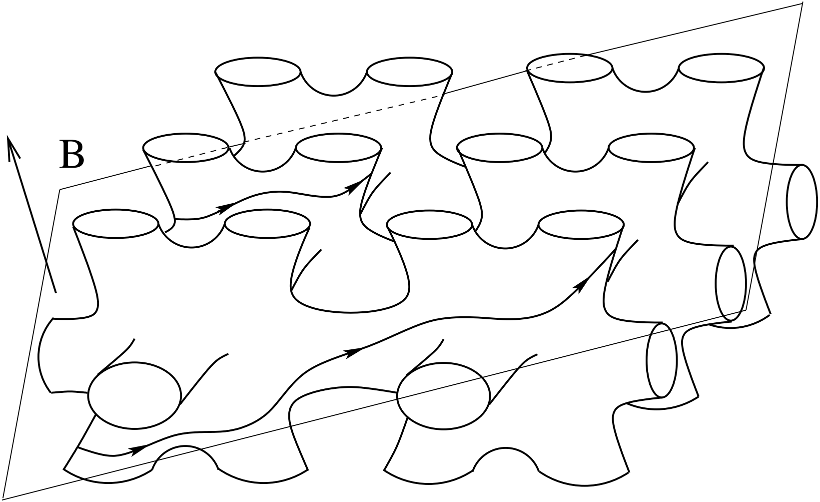
Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Июнь 2025

Мы рассматриваем задачу С.П. Новикова об описании линий уровня квазипериодических функций на плоскости с произвольным числом квазипериодов. Задача Новикова имеет фундаментальное значение для целого ряда областей математики и физики, в частности, задача с 3 квазипериодами обладает чрезвычайной важностью при описании гальваномагнитных явлений в кристаллах. Случай 3 квазипериодов на данный момент исследован наиболее детально, кроме того, имеются глубокие аналитические результаты для случая 4 квазипериодов, а также ряд общих результатов для произвольного числа квазипериодов N. Случаи $N > 3$ исследованы не столь глубоко, как случай $N = 3$, вместе с тем, они также имеют большое значение при описании широких классов физических систем. Здесь мы рассмотрим приложения задачи Новикова в физике двумерных систем, а именно, физике двуслойных атомарных систем, оптике, физике ультрахолодных атомов, физике двумерных электронных систем и др. Исследование задачи Новикова для специальных классов потенциалов, возникающих в таких системах, имеет важное значение при описании многих свойств этих систем (включая их спектральные свойства), а также позволяет провести их сравнение с моделями случайных потенциалов на плоскости.

Как хорошо известно, задача С.П. Новикова, а именно, задача описания линий уровня квазипериодических потенциалов на плоскости, была поставлена первоначально для функций с 3 квазипериодами в работе

С.П. Новиков., Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса., Успехи мат. наук **37**:5 (1982), 3-49.

В этой постановке задача Новикова совпадает с задачей описания геометрии пересечений произвольной 3-периодической поверхности в $\mathbb{R}^3$ семейством параллельных плоскостей и, как также хорошо известно, играет весьма важную роль при описании гальваномагнитных явлений в металлах со сложными поверхностями Ферми. Случай 3 квазипериодов интенсивно исследовался в топологической школе Новикова и на данный момент представляет наиболее детально исследованный случай в общей задаче Новикова, в том числе, и с точки зрения описания гальванотраспортных явлений в проводниках.


B

Общая постановка задачи Новикова представлена в работах

С.П. Новиков., Уровни квазипериодических функций на плоскости и гамильтоновы системы., Успехи мат. наук **54**:5 (329) (1999), 147–148,
И.А. Дынников, С.П. Новиков., Топология квазипериодических функций на плоскости., Успехи мат. наук **60**:1 (361) (2005), 3–28,
где также получены наиболее глубокие на данный момент результаты для случая 4 квазипериодов.

Отметим здесь, что, согласно общепринятому определению, мы называем квазипериодической функцией на плоскости с N квазипериодами ограничение N - периодической функции $F(z^1, \dots, z^N)$ в $\mathbb{R}^N$ на плоскость $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) \quad = \quad F|_{\mathbb{R}^2} \tag{1}$$

при произвольном афинном вложении $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N$ общего положения.

Здесь мы будем также предполагать, что функция $F(\boldsymbol{z})$ является достаточно гладкой, а функции $f(x, y)$ имеют лишь особенности типа кратных седел либо изолированных минимумов и максимумов в $\mathbb{R}^2$.

Наиболее важную часть задачи Новикова (а также наиболее сложную ее часть) составляет описание геометрии открытых (незамкнутых) линий уровня

$$f(x, y) \; = \; \mathrm{const}$$

Вместе с тем, однако, исследование замкнутых линий уровня функции $f(x, y)$ часто также представляет большой интерес и, кроме того, также играет важную роль в общем исследовании.

Определение квазипериодической функции на плоскости делает естественным, в действительности, рассмотрение задачи Новикова сразу для всего семейства функций $f(x, y, \boldsymbol{a})$ (при заданной функции $F(\boldsymbol{z})$), отвечающих всем плоскостям $\Pi = \mathbb{R}^2$ заданного направления вложения $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N$, отличающихся лишь сдвигами в $\mathbb{R}^N$ на векторы $\boldsymbol{a} \perp \Pi$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{N-2})$.

В работах
И.А. Дынников, А.М, С.П. Новиков, Геометрия квазипериодических функций на плоскости, *Успехи мат. наук* **77**, выпуск 6(468), 109-136 (2022) arXiv:2306.11257
А.М, О задаче Новикова с большим числом квазипериодов и ее обобщениях, *Труды МИАН* **325** (2024), 175-189.

был также получен ряд общих результатов для задачи Новикова при произвольном N, которые мы будем использовать здесь.

В целом, при выполнении перечисленных выше условий, в случаепроизвольного N, для любого описанного выше семейства функций $f(x, y, \boldsymbol{a})$ верны следующие утверждения.

1) Открытые линии уровня

$$f(x, y, \boldsymbol{a}) \;\; = \;\; \epsilon \tag{2}$$

возникают (хотя при одном значении $\boldsymbol{a}$) в замкнутом энергетическом интервале $\epsilon \in [\epsilon_1, \epsilon_2]$, который может стягиваться в одну точку $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_0$.

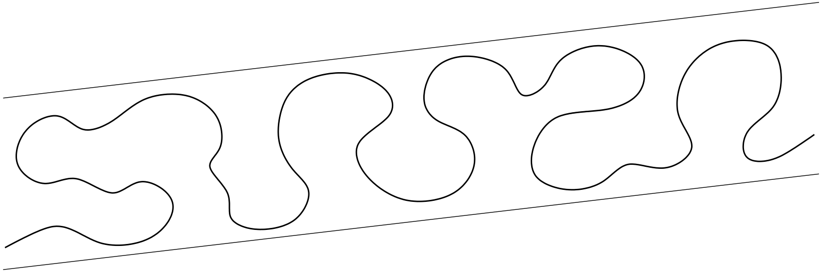
2) В случае $\epsilon_2 > \epsilon_1$ и $\epsilon \in (\epsilon_1, \epsilon_2)$ открытые линии уровня (2) возникают при всех значениях $\boldsymbol{a}$.

3) В случае $\epsilon = \epsilon_0$, $\epsilon = \epsilon_1$ или $\epsilon = \epsilon_2$ (и $N \geq 4$) открытые линии уровня (2) могут возникать лишь при некоторых значениях $\boldsymbol{a}$. Соответствующие значения $\boldsymbol{a}$ образуют в этом случае всюду плотное множество в $\mathbb{R}^{N-2}$, а все плоскости $\Pi(\boldsymbol{a})$ содержат на этих уровнях замкнутые линии уровня сколь угодно больших размеров.
4) При $\epsilon \notin [\epsilon_1, \epsilon_2]$ линии уровня всех $f(x, y, \boldsymbol{a})$ являются замкнутыми, а их размеры ограничены одной константой $D(\epsilon)$, стремящейся к бесконечности при $\epsilon \to \epsilon_1$, $\epsilon \to \epsilon_2$ или $\epsilon \to \epsilon_0$.

Здесь нам удобнее будет называть функции $f(x, y)$ потенциалами и использовать для них обозначение $V(x, y)$.

В определенном смысле, квазипериодические потенциалы представляют промежуточный тип между периодическими и случайными потенциалами, что, в частности, отражается и в поведении их линий уровня на плоскости.

Среди квазипериодических потенциалов можно выделить отдельный класс потенциалов, обладающих "топологически регулярными" открытыми линиями уровня. Топологически регулярные открытые линии уровня, хотя и не является периодическими, лежат в прямых полосах конечной ширины в $\mathbb{R}^2$, проходя их насквозь. Топологически регулярные линии уровня возникают одновременно во всех плоскостях $\Pi(\boldsymbol{a})$ заданного направления (для всех потенциалов $V(x, y, \boldsymbol{a})$) и являются устойчивыми по отношения к малым вариациям параметров задачи (включая направление вложения $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N$ и функцию $f(\boldsymbol{z})$). Носители таких линий уровня разделены в торе $\mathbb{T}^N$ гиперторами $\mathbb{T}^{N-1} \subset \mathbb{T}^N$ и, таким образом, каждому семейству таких линий уровня отвечает фиксированный класс гомологий, определяемый данным вложением.



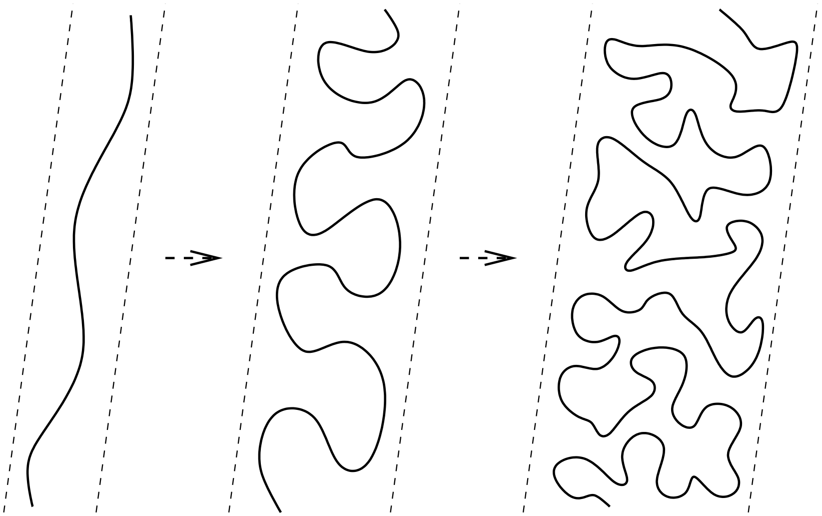
Топологически регулярные линии уровня играют чрезвычайно важную роль во многих приложениях задачи Новикова. В частности, они представляют основной тип незамкнутых электронных траекторий на сложных поверхностях Ферми, а связанные с ними гомологические классы определяют нетривиальные топологические инварианты, наблюдаемые в магнитотранспортных явлениях в сильных магнитных полях.

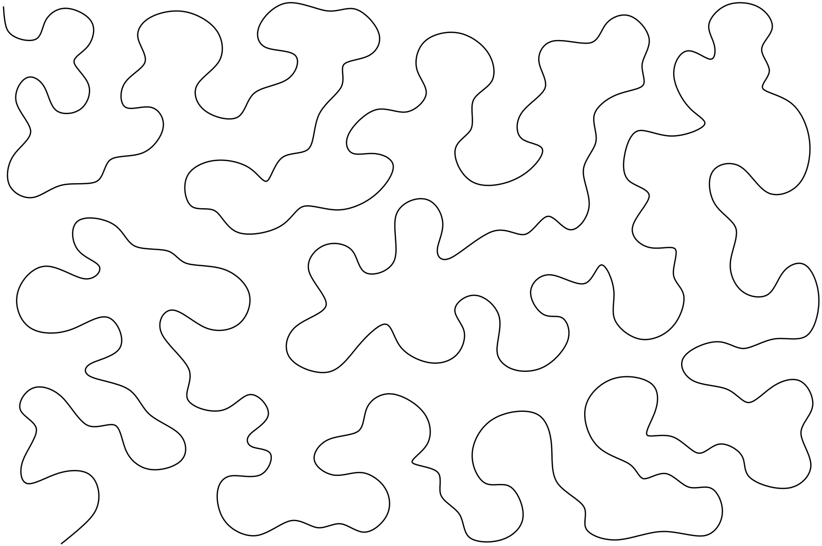
Топологически регулярные линии уровня должны возникать также для многих важных семейств потенциалов с 3 и 4 квазипериодами во многих двумерных системах. Причиной этого является наличие (открытых) всюду плотных множеств, отвечающих "топологически регулярным" потенциалам, в "базовых" пространствах $G_{N,2}$ (параметризующих направления вложения $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N$ при заданной F) в случае $N = 3$ (А.В. Зорич 1984, И.А. Дынников 1999) и $N = 4$ (С.П. Новиков 1999, И.А. Дынников, С.П. Новиков 2005).

Вместе с тем, "топологически регулярные" потенциалы могут возникать также и во многих интересных семействах с $N > 4$, что обусловлено спецификой соответствующих двумерных систем.

Можно видеть, что по своим “транспортным” (баллистическим) свойствам “топологически регулярные” потенциалы близки к периодическим потенциалам. Вместе с тем, при увеличении сложности гомологических классов вложения $\mathbb{T}^{N-1} \subset \mathbb{T}^{N}$ ширина полос, содержащих открытые линии уровня увеличивается, а форма линий уровня становится все более сложной.

Предельным случаем такого процесса является появление “хаотических” линий уровня у соответствующего потенциала $V(x, y)$, блуждающих “всюду” на плоскости $\mathbb{R}^{2}$.





Потенциалы с хаотическими линиями уровня появляются уже в случае $N = 3$ (С.П. Царев 1992, И.А. Дынников 1997) и, конечно, в случае $N > 3$. Можно видеть, что такие “хаотические” потенциалы $V(x, y)$ могут рассматриваться также в качестве модели случайных потенциалов на плоскости.

В случае $N = 3$ “хаотические” потенциалы $V(x, y)$ особенно сближает со случайными тот факт, что открытые линии уровня появляются у них лишь при единственном значении энергии $\epsilon = \epsilon_0$ (И.А. Дынников 1993). Отметим, что при $N > 3$ аналогичного свойства для потенциалов с хаотическими открытыми линиями уровня пока не установлено. В целом, можно ожидать, что при увеличении N вероятность возникновения “хаотических” потенциалов возрастает, а “топологически регулярных” - снижается.

Вероятно, наиболее ранними двумерными структурами, обладающими искусственно созданными "суперпотенциалами", были двумерные электронные системы в гетероструктурах (GaAs/AlGaAs и др). Такие структуры известны, в том числе, открытием в них целочисленного и дробного квантовых эффектов Холла, а также других замечательных эффектов. Целый ряд замечательных эффектов (бабочка Хофштадтера, нетривиальные числа Черна в квантовом эффекте Холла и др.) в таких системах при этом связан с созданием в них искусственных "суперпотенциалов" с помощью целого ряда методик. Как правило, большинство этих методик связано с наложением периодических (часто одномерных) потенциалов в плоскости системы с целью получения потенциала желаемой формы. При наложении большого количества модулирующих потенциалов в таких системах естественно возникновение квазипериодических потенциалов с произвольным числом квазипериодов. Как правило, двумерный электронный газ в таких системах отвечает большой длине свободного пробега электронов, что, в частности, делает важным исследование одноэлектронной динамики в таких системах.

Нетрудно видеть, что задача Новикова имеет непосредственное отношение к электронной динамике в квазиклассическом пределе, описывая геометрию областей

$$V(x,y) \; < \; \epsilon$$

(эквивалентная формулировка задачи Новикова) при различных значениях ϵ. Вместе с тем, приложения задачи Новикова, в действительности, не ограничиваются этим пределом в описываемых системах.

В частности, задача Новикова также дает описание адиабатического дрейфа циклотронных орбит (как квазиклассических, так и квантовых) в описанных "суперпотенциалах" в присутствии сильного магнитного поля. Отметим здесь также, что исследование описанных систем в присутствии сильных (в т.ч. квантующих) магнитных полей является одним из главных направлений их экспериментального изучения.

Другой класс весьма интересных двумерных систем представляют системы ультрахолодных атомов в оптических решетках (оптических ловушках). Соответствующие решетки создаются с помощью интерференции оптических стоячих волн и имеют обычно либо периодическую либо квазипериодическую структуру. Изучение самых различных явлений, возникающих в таких системах при наличии квазипериодического порядка, представляет в настоящее время одно из быстро развивающихся направлений в физике ультрахолодных атомов.

Как и в случае электронных систем, задача Новикова связана здесь, прежде всего, с описанием транспортных явлений в таких системах. Отметим также, что в описанных системах, кроме включения внешнего магнитого поля, можно рассматривать также его имитации с помощью целого ряда эффектов, основанных на различных типах воздействия на атомы в решетках.

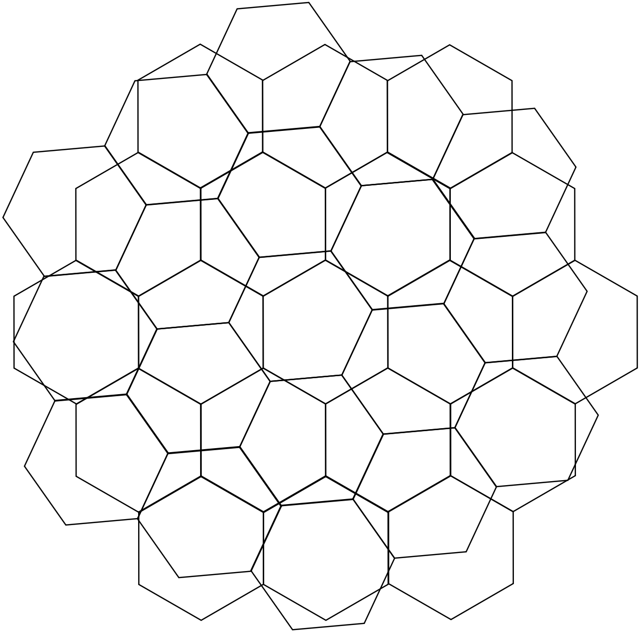
При обсуждении других классов двумерных систем невозможно, конечно, пройти мимо многослойных атомарных систем, изучение которых переживает самый бурный всплеск в настоящее время. Наиболее известной из таких систем является двуслойный графен (а также многослойный графен либо графен на различных подложках). Надо сказать, однако, что класс изучаемых других соединений в настоящее время также стремительно расширяется, при этом огромное впечатление производит большое количество новых эффектов, наблюдаемых в таких структурах (нельзя не сказать также о большом потенциале приложений наблюдаемых явлений в самой ближайшей перспективе в развитии современной микроэлектроники и других технологий).

Многослойные (в частности, двуслойные) структуры получаются наложением периодических двумерных атомных слоев, обычно повернутых на некоторые углы относительно друг друга. Во многих системах при этом часто существуют серии “магических” углов поворота, приводящих к возникновению периодических потенциалов с гораздо большими периодами в $\mathbb{R}^2$. Повороты на углы общего положения, как можно видеть, отвечают возникновению квазипериодических двумерных потенциалов. Соответствующие структуры часто называются “муаровыми” структурами в таких системах.

Надо сказать, что задача Новикова представляет интерес в обоих случаях (“магических” углов поворота и углов общего положения) в описанных выше системах. Можно отметить также, что, как и в предыдущих случаях, задача Новикова связана здесь прежде всего с описанием транспортных явлений, однако, эта связь здесь является более сложной (в частности, функции $f(x, y)$ уже не являются здесь потенциалами в обычном смысле, а представляют собой модулированные параметры электронного спектра, линии уровня которых определяют многие транспортные свойства системы). В общем случае, связь задачи Новикова с особенностями квантового спектра может проявляться также и в термодинамических, а также других явлениях в описываемых системах.

Описанные (а также и другие) двумерные системы служат богатым источником очень интересных семейств квазипериодических потенциалов, задача Новикова для которых обладает дополнительными важными и интересными особенностями, в том числе, дающими дополнительные возможности для ее исследования. Можно отметить также, что возникающие семейства нередко являются семействами “необщего положения” (с точки зрения общей формулировки задачи Новикова), в частности, многие из них, например, не содержат “топологически регулярных” потенциалов и могут, как мы уже отмечали, рассматриваться в качестве моделей случайных потенциалов на плоскости. Ниже мы рассмотрим ряд таких семейств и сформулируем ряд утверждений о поведении линий уровня соответствующих потенциалов $V(x, y, \boldsymbol{a})$.

В качестве первого примера, рассмотрим потенциалы $V(x, y)$, образованные суперпозицией двух потенциалов одинаковой поворотной симметрии (3-го, 4-го или 6-го порядка). Потенциалы $V_1(x, y)$ и $V_2(x, y)$ могут при этом быть как одинаковыми (например, случай двуслойного графена или других соединений), так и различными (в частности, они могут иметь различные длины периодов в $\mathbb{R}^2$). (Второй случай имеет место, например, для слоев графена на подложке из BN, активно изучаемых в настоящее время, а также для многих других соединений, имеющих слоистую структуру определенной поворотной симметрии). Можно считать при этом, что решетка потенциала V_1 зафиксирована в $\mathbb{R}^2$, в то время как решетка V_2 может быть повернута на произвольный угол α и сдвинута на произвольный вектор $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^2$.



Пусть потенциал $V(x, y)$ является гладким (изотропным, трансляционно инвариантным) функционалом (с достаточно быстро убывающими с расстоянием вариационными производными) от значений V_1 и $\tilde{V}_2$ в $\mathbb{R}^2$

$$V(x, y, \alpha, \boldsymbol{A}) \; = \; Q\left[V_1, \tilde{V}_2\right](x, y) \; ,$$

где $\tilde{V}_2$ представляет потенциал V_2, повернутый на угол α и сдвинутый на вектор $\boldsymbol{A}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$ (в простейшем случае, например, $V(x.y) = V_1(x, y) + V_2(x, y)$).

Нетрудно видеть, что в общем случае потенциалы $V(x, y, \alpha, \boldsymbol{A})$ являются квазипериодическими функциями с 4 квазипериодами.

Можно отметить также, что в случае одинаковых (или соизмеримых) периодов V_1 и V_2 существуют серии специальных (“магических”) углов α_s, для которых потенциалы $V(x, y, \alpha_s, \boldsymbol{A})$ являются периодическими. В случае несоизмеримых периодов V_1 и V_2 “магических” углов не возникает.

Не все потенциалы $V(x, y, \alpha, \boldsymbol{A})$ обладают точной поворотной симметрией. Вместе с тем, в пространстве параметров $\boldsymbol{A}$ имеется всюду плотное множество, отвечающее потенциалам с точной поворотной симметрией (исходного порядка). В частности, семейство $V(x, y, \alpha, \boldsymbol{A})$ не может содержать "топологически регулярных" потенциалов.

Теорема 1.

При перечисленных выше условиях любой потенциал $V(x, y, \alpha, \boldsymbol{A})$, отвечающий не "магическому" углу α, может иметь открытые линии уровня лишь при одном значении энергии

$$\epsilon \;=\; \epsilon_0(\alpha)$$

Функция $\epsilon_0(\alpha)$ является непрерывной на множестве не "магических" углов $\alpha \in [0, 2\pi]$.

arXiv:2409.09759

Отдельный интерес представляют потенциалы, задаваемые суперпозицией идентичных потенциалов V_1 и V_2, обладающих смметрией отражения

$$\overline{V}_1 \equiv V_1$$

(двуслойный графен и др.) или, более общо, потенциалов V_1 и V_2, таких что

$$\overline{V}_1 = V_2$$

Как и в предыдущем случае, мы считаем, что потенциал V_1 обладает поворотной симметрией 3-его, 4-го или 6-го порядка (в этом случае, очевидно, имеются серии "магических" углов α_s).

В этом случае, кроме утверждений приведенной выше теоремы, можно привести также оценку на рост размеров замкнутых линий уровня $V(x, y, \alpha, \boldsymbol{A})$ при приближении к уровню ϵ_0.

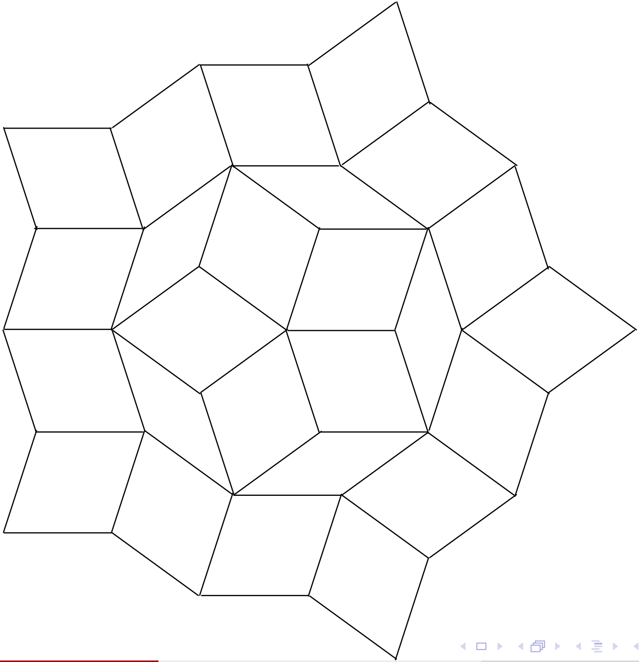
А именно, при выполнении прведенных выше условий, для почти всех не "магических" углов α (кроме множества меры нуль) и $\forall \delta > 0$, константа $D(\epsilon)$, ограничивающая размеры замкнутых линий уровня $V(x, y, \alpha, \boldsymbol{A})$ на уровне ϵ, удовлетворяет условию

$$D(\epsilon) \quad \leq \quad C \, \left|\epsilon - \epsilon_0\right|^{-1-\delta}$$

(где константа C определяется параметрами функционала Q, arXiv:2501.15867)

Отметим, что здесь, в действительности, проявляется некоторое отличие от многих моделей случайных потенциалов на плоскости (где часто возникает степень $-4/3$), что говорит о некоторой специфике потенциалов рассматриваемого семейства как модели случайных потенциалов.

Как мы уже сказали, приведенные выше потенциалы играют важную роль в теории “двуслойных” систем. Отметим здесь также, что при исследовании таких потенциалов важную роль играет возможность их приближения периодическими потенциалами (с растущими периодами) в $\mathbb{R}^2$. Вместе с тем, существуют также другие важные классы (квазикристаллических) потенциалов, приближение которых периодическими не является возможным (например, квазикристаллические потенциалы симметрии 5 порядка и т.п.). Надо сказать при этом, что такие потенциалы не только играют важную роль в теории двумерных квазикристаллов, но и являются предметом активного исследования также и в других двумерных системах (например, в системах холодных атомов).



Приведем здесь аналог теоремы 1 для потенциалов, обладающих квазикристаллической симметрией диэдра D_n, $n \geq 3$, (встречающихся особенно часто в упомянутых системах). Отметим сразу, что под этим условием мы подразумеваем, что полное семейство потенциалов $V(x, y, \boldsymbol{a})$, определяемое ограничениями (1) при фиксированном направлении вложения $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N$, содержит всюду плотное подмножество потенциалов, обладающих точной симметрией D_n. Другими словами, в пространстве параметров $\boldsymbol{a}$ $(\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^{N-2})$ имеется всюду плотное подмножество, отвечающее потенциалам с точной симметрией D_n. Как нетрудно видеть, никакой из потенциалов $V(x, y, \boldsymbol{a})$ также не может иметь в этом случае “топологически регулярных” линий уровня и должен быть отнесен к “хаотическим” согласно нашей терминологии.

Как и ранее, мы предполагаем выполненными все сформулированные ранее условия на функцию $F(\boldsymbol{z})$ и вложение $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^N$.

Теорема 2.

При выполнении всех прведенных выше условий, квазипериодические потенциалы $V(x, y, \boldsymbol{a})$ (с N квазипериодами), обладающие квазикристаллической симметрией D_n, могут иметь открытые линии уровня (либо замкнутые линии уровня сколь угодно больших размеров) лишь при единственном значении энергии $\epsilon = \epsilon_0$.

arXiv:2505.07657

С П А С И Б О

З А

В Н И М А Н И Е