Когомологии Морса-Новикова

Д.В. Миллионщиков

МГУ имени М.В. Ломоносова, РГУ нефти и газа (НИУ) имени И.М. Губкина

Конференция памяти С.П. Новикова

6 июня 2025

- Определение
- Связь с критическими точками многозначных функционалов
- Примеры явных вычислений
- Локально конформно кэлеровы многообразия
- Симметрии уравнений в частных производных (план Олега Морозова) - один слайд из его доклада на семинаре С.П. Новикова

Пусть M^n — гладкое многообразие.
ω — гладкая замкнутая 1-форма ($d\omega = 0$) на M^n .

Определим комплекс де Рама $(\Lambda^*(M^n), d_\omega)$ с деформированным дифференциалом d_ω

$$d_\omega = d + \omega \wedge : \; d_\omega a = da + \omega \wedge a.$$

Когомологии этого комплекса называются **когомологиями Морса-Новикова**

- С.П. Новиков, "Блоховские гомологии. Критические точки функций и замкнутых 1-форм", ДАН СССР, 287:6 (1986)

Иногда в литературе когомологии Морса-Новикова называются когомологиями Лихнеровича

- Guedira, F., Lichnerowicz, A.: Géométrie des algèbres de Lie locales de Kirillov. J. Math. Pures Appl. 63, 407–484 (1984).

В начале 80-х Новиков стал одним из создателей ещё одного большого научного направления – аналога теории Морса для многозначных функционалов. Параллельно на Западе родственные идеи развивались несколько в ином ключе в работах Виттена и Флоера и их последователей. Наблюдение Новикова, давшее начало этой теории, состояло в том, что даже несложная механическая система после гамильтоновой редукции может перестать быть лагранжевой в традиционном понимании, но остаётся таковой, если обобщить постановку вариационной задачи, разрешая функционалу действия быть многозначным, имея однозначной лишь первую вариацию. Иначе говоря, лагранжиан системы следует рассматривать как замкнутую, но не обязательно точную 1-форму.

- С.П. Новиков, “Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса”, ДАН СССР, 260:1 (1981), 31–35
- С.П. Новиков, “Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса”, УМН, 37:5 (1982), 3–49.
- С.П. Новиков, “Блоховские гомологии. Критические точки функций и замкнутых 1-форм”, ДАН СССР, 287:6 (1986)

Обобщая ситуацию с монополем Дирака, Новиков рассмотрел n-мерное многообразие M^n с метрикой g_{ij}, со скалярным потенциалом U и с замкнутой 2-формой F магнитного поля, не обязательно точной. Рассмотрим покрытие областями $U_\alpha \subset M^n, M^n \subset \cup_\alpha U_\alpha$, такое, что 2-форма $F = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ является точной $F = d\omega_\alpha$ в каждой U_α.

1-форма $\omega_\alpha = A_k^\alpha dx^k$, $d\omega_\alpha = F_{ij} dx^i \wedge dx^j$ определена с точностью до некоторой замкнутой 1-формы и мы можем рассмотреть множество локальных действий:

$$S_\alpha(\gamma) = \int_\gamma \left(\frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j - U + e A_k^\alpha \dot{x}^k \right) dt, \qquad (1)$$

Рассмотрим путь $\gamma \subset U_\alpha \cap U_\beta$. Множество $\{S_\alpha\}$ локальных действий определяет, вообще говоря, многозначный функционал S. Так как 1-форма $\omega_\alpha - \omega_\beta$ замкнута на $U_\alpha \cap U_\beta$, то интеграл

$$S_\alpha(\gamma_\lambda) - S_\beta(\gamma_\lambda) = \int_{\gamma_\lambda} (\omega_\alpha - \omega_\beta)$$

инвариантен относительно любой деформации $\gamma_\lambda \subset U_\alpha \cap U_\beta$ γ в классе: a) периодических кривых; b) кривых с одинаковыми конечными точками.

Решающее наблюдение Новикова было: бесконечномерная 1-форма δS хорошо определена и замкнута для следующих функциональных пространств:

a) Ω^+ ориентированных замкнутых контуров γ, таких, что $\exists \alpha, \gamma \subset U_\alpha$;

b) $\Omega(x, x')$ путей $\gamma(x, x')$, соединяющих точки x, x', таких, что $\exists \alpha, \gamma(x, x') \subset U_\alpha$.

В 1982 году Э. Виттен использовал деформированный комплекс де Рама $(\Lambda^*(M^n), d_\omega)$ с точной 1-формой $\omega = tdf$ для нового доказательства неравенств Морса без кручения (t – вещественный параметр)

$$\begin{gathered} d_t = e^{-ft} d e^{ft} = d + tdf \wedge, \\ d_t(\xi) = d\xi + tdf \wedge \xi, \ \xi \in \Lambda^*(M^n), \end{gathered} \tag{2}$$

Операторы d_t и d сопряжены обратимым оператором e^{ft} и, следовательно, группы когомологий $H^*(M^n, \mathbb{R})$ (стандартные когомологии де Рама) и $H^*_t(M^n, \mathbb{R})$ (деформированные) изоморфны друг другу. На уровне форм этот изоморфизм задается калибровочным преобразованием

$$\xi \to e^{ft}\xi.$$

Определим сопряженный оператор $d_t^* = e^{ft} d^* e^{-ft}$ относительно скалярного произведения

$$(\alpha, \beta) = \int_{M^n} (\alpha, \beta)_x dV,$$

где $(\alpha, \beta)_x$ — скалярное произведение в расслоении $\Lambda^*(T_x^*(M^n))$, определенное метрикой g_{ij} на M^n

Также рассмотрим деформированный лапласиан $H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t$, действующий на p-формы. Коцикл ω из $H_t^p(M^n, \mathbb{R})$ — это собственный вектор гамильтониана $H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t$ с нулевым собственным значением λ.

$b_p(M^n) = \dim H^p(M^n, \mathbb{R}) =$ размерность нулевого собственного подпространства оператора H_t на p-формах.

Можно подсчитать, что

$$H_t = d_t d_t^* + d_t^* d_t = dd^* + d^*d + t^2(df)^2 + t\sum_{i,j} \nabla^2_{(i,j)}(f)[\tilde{a}^i, \tilde{a}^{j*}], \tag{3}$$

где $(df)^2 = (df, df)_x = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^j}$ и

$$\tilde{a}^i(\xi) = dx^i \wedge \xi, \quad \nabla^2_{(i,j)} = \nabla_i \nabla_j - \Gamma^k_{ij}\nabla_k.$$

Поскольку «потенциальная энергия» $t^2(df)^2$ гамильтониана H_t становится очень большой для $t \to +\infty$, собственные функции H_t концентрируются вблизи критических точек $df = 0$, то низшие собственные значения H_t можно вычислить путем разложения гамильтониана в ряд Тейлора в окрестностях критических точек.

Выбрав морсовские координаты x^i в некоторой окрестности W критической точки P

$$f(x) = \frac{1}{2}\sum \lambda_i (x^i)^2, \quad \lambda_1 = \ldots = \lambda_q = -1, \lambda_{q+1} = \ldots = \lambda_n = 1,$$

где q – индекс критической точки P, и введя риманову метрику g_{ij} на M^n такую, что x^i – евклидовы координаты для g_{ij} в W можно локально вычислить гамильтониан H_t:

$$H_t = \sum_i \left(-\frac{\partial^2}{\partial {x^i}^2} + t^2 {x^i}^2 + t\lambda_i [\tilde{a}^i, \tilde{a}^{i*}] \right).$$

Первый член разложения

$$H_i = -\frac{\partial^2}{\partial {x^i}^2} + t^2 {x^i}^2$$

— это гармонический осциллятор и у него простой спектр

$$t(1 + 2N_i), \quad N_i = 0, 1, 2, \dots$$

H_i коммутирует с $[\tilde{a}^i, \tilde{a}^{i*}]$ и собственные значения последнего оператора равны ± 1.

$$[\tilde{a}^i, \tilde{a}^{i*}](\psi(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}) = \begin{cases} \psi(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, i \in (i_1, \dots, i_p), \\ -\psi(x) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}, i \notin (i_1, \dots, i_p). \end{cases}$$

Напомним, что

$$H_t = \sum_i \left(-\frac{\partial^2}{\partial {x^i}^2} + t^2 {x^i}^2 + t\lambda_i [\tilde{a}^i, \tilde{a}^{i*}] \right).$$

Тогда собственные значения ограничения $H_t|_W$ равны

$$t \sum_i (1 + 2N_i + \lambda_i l_i), \quad N_i = 0, 1, 2, \ldots, \ l_i = \pm 1. \qquad (4)$$

Соответствующие собственные функции $\Psi_t = \psi(x,t) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}$ определены в окрестности W, а не на всем многообразии M^n.

Используя разбиение единицы, можно определить новую гладкую q-форму $\tilde{\Psi}_t$ на M^n такую, что $\tilde{\Psi}_t$ совпадает с Ψ_t в некотором $\tilde{W} \subset W$ и $\tilde{\Psi}_t \equiv 0$ вне W. q-форма $\tilde{\Psi}_t$ называется **квазимодой**

$$H_t \tilde{\Psi}_t = t \left(\sum_i (1 + 2N_i + \lambda_i l_i) + \frac{B}{t} + \frac{C}{t^2} + \dots \right) \tilde{\Psi}_t, \quad t \to +\infty. \tag{5}$$

Числа $t \sum\limits_i (1 + 2N_i + \lambda_i l_i)$ называются асимптотическими собственными значениями, а минимальное значение E_0^{as} из них приближает минимальное собственное значение H_t при $t \to +\infty$.

Чтобы найти E_0^{as}, мы должны положить $N_i = 0$ для всех i в

$$\sum_i (1 + 2N_i + \lambda_i l_i) = \sum_{i=1}^{q} (1 - l_i) + \sum_{i=q+1}^{n} (1 + l_i).$$

эта сумма ≥ 0 и равна нулю тогда и только тогда, когда

$$l_1 = \cdots = l_q = 1, \quad l_{q+1} = \cdots = l_n = -1.$$

Это означает, что H_t имеет **ровно одно нулевое асимптотическое собственное значение для каждой критической точки индекса q.**

Обращение в нуль первого члена асимптотического разложения для минимального собственного значения H_t является лишь необходимым условием, следовательно,

$$m_q(f) \geq b_q(M^n).$$

.

В 1987 году Пажитнов показал, что в рамках подхода Виттена к теории Морса в деформации $d + tdf$ (f – функция Морса на многообразии M, t – вещественный параметр) точную форму df можно заменить на произвольную морсовскую замкнутую 1-форму ω на M.

Теорема (А. Пажитнов, 1987)

Для достаточно больших вещественных t верны оценки

$$m_p(\omega) \geq \dim H^p_{t\omega}(M).$$

Зависимость от когомологического класса $[\omega]$

Пусть 1-формы ω, ω' когомологичны

$$\omega' = \omega + df, \ f \in C^\infty(M^n, \mathbb{R})$$

Тогда существует изоморфизм

$$H^p_\omega(M^n) \cong H^p_{\omega'}(M^n),$$

определенный отображением на уровне p-форм

$$[\alpha] \to [e^f \alpha], \alpha \in \Lambda^p(M^n).$$

Топологический смысл

Рассмотрим локальную систему (локально постоянный пучок) групп $\mathbb{C}_\rho$ ранга один на многообразии M^n, определенную при помощи представления ρ (интегрирование 1-формы ω по петлям γ)

$$\rho : \pi_1(M^n) \to GL(\mathbb{C}, 1), [\gamma] \to e^{\int_\gamma \omega}.$$

Тогда существует изоморфизм когомологий

$$H^p_\omega(M^n) \cong H^p(M^n, \mathbb{C}_\rho),$$

где $H^p(M^n, \mathbb{C}_\rho)$ — когомологии многообразия M^n с коэффициентами в локальной системе $\mathbb{C}_\rho$.

Алания в 1999 изучал когомологии $H^*_{\rho_\omega}(M_n, \mathbb{C})$ одной серии нильмногообразий M_n. Он доказал их тривиальность $H^*_{\rho_\omega}(M_n, \mathbb{C}) = 0$ при $\omega \neq 0$. Доказательство основывалось на теореме Номидзу, сводящей задачу к вычислениям в терминах соответствующей нильпотентной алгебры Ли.

М. 2002 заметил, что тривиальность когомологий **произвольного нильмногообразия** $H^*_{\rho_\omega}(G/\Gamma, \mathbb{R})$, при $\omega \neq 0$ следует из теоремы Диксмье.

Теорема (Диксмье)

Для нильмногообразия G/Γ когомологии $H^*_\omega(G/\Gamma, \mathbb{R})$ совпадают с когомологиями $H^*_\omega(\mathfrak{g})$ с коэффициентами в одномерном представлении алгебры Ли $\rho_\omega : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}, \rho_\omega(\xi) = \omega(\xi)$ и следовательно при $\omega \neq 0$

$$H^*_\omega(G/\Gamma, \mathbb{R}) = H^*_\omega(\mathfrak{g}) = 0.$$

Солвмногообразие (нильмногообразие) M — это компактное однородное пространство вида G/Γ, где G — односвязная разрешимая (нильпотентная) группа Ли, а Γ — решетка в G.

Пример солвмногообразия не являющегося нильмногообразием
Рассмотрим G – треугольные матрицы вида

$$\begin{pmatrix} e^{kz} & 0 & 0 & x \\ 0 & e^{-kz} & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $e^k + e^{-k} = n \in \mathbb{N}, k \neq 0$.

Группу G можно рассматривать как полупрямое произведение $G = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}$ действует на $\mathbb{R}^2$ (с координатами x, y) следующим образом

$$z \to \phi(z) = \begin{pmatrix} e^{kz} & 0 \\ 0 & e^{-kz} \end{pmatrix}.$$

Решетка Γ в G порождена следующими матрицами:

$$\begin{pmatrix} e^{k} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-k} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & v_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & u_2 \\ 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Соответствующая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет очевидный базис и коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_2] = ke_2, \quad [e_1, e_3] = -ke_3, \quad [e_2, e_3] = 0.$$

Левоинвариантные 1-формы

$$e^1 = dz, \quad e^2 = e^{-kz}dx, \quad e^3 = e^{kz}dy \tag{7}$$

являются дуальным базисом для e_1, e_2, e_3 и

$$de^1 = 0, \quad de^2 = -ke^{-kz}dz \wedge dx = -ke^1 \wedge e^2, \quad de^3 = ke^1 \wedge e^3. \tag{8}$$

фундаментальная группа $\pi_1(G/\Gamma)$ естественно изоморфна решетке Γ: $\pi_1(G/\Gamma) \cong \Gamma$.

Рассмотренная выше алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G является примером **вполне разрешимой** алгеброй Ли.

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется вполне разрешимой, если $\forall X \in \mathfrak{g}$ оператор $ad(X)$ имеет только действительные собственные значения.

Пусть G/Γ — солвмногообразие. Можно отождествить его комплекс де Рама $\Lambda^*(G/\Gamma)$ с подкомплексом

$$\Lambda^*_{\Gamma inv}(G) \subset \Lambda^*(G)$$

левоинвариантных форм на G относительно действия Γ.

Подкомплекс $\Lambda^*_{\Gamma inv}(G)$ в свою очередь содержит подкомплекс $\Lambda^*_{Ginv}(G)$ левоинвариантных форм относительно действия G.

$$\Lambda^p(\mathfrak{g}^*) \cong \Lambda^*_{Ginv}(G) \subset \Lambda^*_{\Gamma inv}(G) \subset \Lambda^*(G)$$

Возникает коцепной комплекс алгебры Ли $\mathfrak{g}$:

$$\mathbb{R} \xrightarrow{d_0=0} \mathfrak{g}^* \xrightarrow{d} \Lambda^2(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{d} \Lambda^3(\mathfrak{g}^*) \xrightarrow{d} \dots$$

Рассмотрим базис $e_1, \dots, e_n$ из $\mathfrak{g}$ и его двойственный базис $e^1, \dots, e^n$ в $\mathfrak{g}^*$.

$$de^k = \sum_{i<j} c_{ij}^k de^i \wedge de^j, \tag{9}$$

где $[e_i, e_j] = \sum c_{ij}^k e_k$.
Когомологии комплекса $(\Lambda^*(\mathfrak{g}^*), d)$ называются когомологиями $H^*(\mathfrak{g})$ с тривиальными коэффициентами алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть G/Γ — компактное солвмногообразие, где G — вполне разрешимая группа Ли, тогда $\psi : \Lambda^*(\mathfrak{g}) \to \Lambda^*(G/\Gamma)$ индуцирует изоморфизм $\psi^* : H^*(\mathfrak{g}) \to H^*(G/\Gamma, \mathbb{R})$ в когомологиях (теорема Хаттори, теорема Номидзу для нильмногообразий).

В рассмотренном выше примере когомологии $H^*(G/\Gamma, \mathbb{R})$ являются линейной оболочкой когомологических классов

$$e^1 = dz, \; e^2 \wedge e^3 = dx \wedge dy, \; e^1 \wedge e^2 \wedge e^3 = dx \wedge dy \wedge dz.$$

Из определения когомологий алгебры Ли следует, что

$$H^1(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{g}/[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}])^*.$$

- $b^1(\mathfrak{g}) = \dim H^1(\mathfrak{g}) \geq 2$ для нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (теорема Диксмье);
- $b^1(\mathfrak{g}) \geq 1$ для разрешимой алгебры Ли $\mathfrak{g}$;
- $b^1(\mathfrak{g}) = 0$ для полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — n-мерная действительная вполне разрешимая алгебра Ли (или комплексная разрешимая) Тогда существует базис $e^1, \dots, e^n$ в $\mathfrak{g}^*$ такой, что

$$
\begin{aligned}
&de^1 = \dots = de^k = 0,\\
&de^{k+s} = \alpha_{k+s} \wedge e^{k+s} + P_{k+s}(e^1, \dots, e^{k+s-1}), \;\; s = 1, \dots, n-k.
\end{aligned}
$$

где $\alpha_{k+s} \in \langle e^1, e^2, \dots, e^k \rangle$,

удобно доопределить $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, k$.

Множество $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ замкнутых 1-форм является множеством весов (вполне приводимого) присоединенного представления $X \to ad(X)$.

Рассмотрим новый канонический базис $\mathfrak{g}^*$ с $t > 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{e}^1 = e^1, \dots, \tilde{e}^k = e^k, \\ \tilde{e}^{k+s} = t^{2(s-1)} e^{k+s}, \;\; s = 1, \dots, n-k. \end{aligned} \tag{10}$$

Тогда для дифференциала d_ω имеем:

$$d_\omega = d_0 + \omega \wedge + t d_1 + t^2 d_2 + \dots, \quad d_0 \tilde{e}^i = \alpha_i \wedge \tilde{e}^i.$$

$$(d_0 + \omega\wedge)(\tilde{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{i_q}) = (\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_q} + \omega) \wedge \tilde{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{i_q}.$$

Определив скалярное произведение в $\Lambda^q(\tilde{e}^1, \dots, \tilde{e}^n)$

$$\begin{gathered} d_\omega^* d_\omega + d_\omega d_\omega^* = R_0 + t R_1 + t^2 R_2 + \dots, \\ R_0(\tilde{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{i_q}) = \|\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_q} + \omega\|^2 \tilde{e}^{i_1} \wedge \dots \wedge \tilde{e}^{i_q}. \end{gathered}$$

При $t \to 0$ минимальное собственное значение $d_\omega^* d_\omega + d_\omega d_\omega^*$ сходится к минимальному собственному значению R_0. Если

$$\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_q} + \omega \neq 0,$$

то деформированные когомологии $H_\omega^q(\mathfrak{g}) = 0$ тривиальны.

Теорема (М. УМН 2003, Мат заметки 2005)

Пусть G/Γ *— компактное солвмногообразие с вполне разрешимой группой Ли* G*. Тогда его деформированные когомологии* $H^*_\omega(G/\Gamma, \mathbb{R})$ *изоморфны когомологиям* $H^*_\omega(\mathfrak{g})$ *соответствующей алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *с коэффициентами в одномерном представлении* ρ_ω*.*

Более того, когомологии $H^*_\omega(G/\Gamma, \mathbb{R}) \neq 0$ *тогда и только тогда, когда*

$$\omega \in \Omega_{\mathfrak{g}} = \{\omega_1, \dots \omega_N\} \subset H^1(G/\Gamma, \mathbb{R}).$$

Конечное подмножество $\Omega_{\mathfrak{g}}$ подскоков когомологий

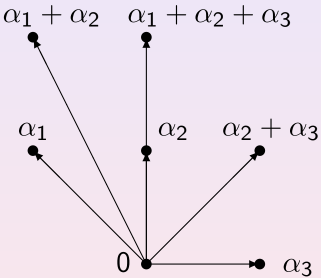

Рис. : $\Omega_{\mathfrak{g}} \subset H^1(\mathfrak{g})$.

Почти неотрицательная секционная кривизна

Теорема (Xiaoyang Chen, Adv. in Math. 2020)

Пусть M^n — замкнутое риманово многообразие **почти неотрицательной секционной кривизны** *и с нетривиальной первой группой когомологий де Рама $H^1_{dR}(M^n) \neq 0$. Тогда* **когомологии Морса-Новикова тривиальны** $H^p_\omega(M^n) = 0, 0 \leq p \leq n$, *при условии $0 \neq [\omega] \in H^1_{dR}(M^n)$.*

Риманово многообразие M^n имеет **почти неотрицательную секционную кривизну**, если оно допускает последовательность римановых метрик $g_j, j \in \mathbb{N}$, таких, что

$$sec(g_j) \geq -\frac{1}{j}, \quad D(g_j) \leq 1.$$

где $sec(g_j)$ – секционная кривизна, $D(g_j)$ =диаметр метрики g_j.

de León, M., López, B., Marrero, J.C., Padrón, E.: On the computation of the Lichnerowicz-Jacobi cohomology. J. Geom. Phys. 44, 507–522 (2003)

Теорема (de León, M., López, B., Marrero, J.C., Padrón, E., 2003)

Пусть на компактном многообразии M^n найдутся и риманова метрика и замкнутая 1-форма ω такие, что ω параллельна относительно связности Леви-Чивиты метрики g, т.е. $\nabla_g \omega = 0$, то тогда

$$H^p_\omega(M) = 0, 0 \leq p \leq n.$$

Локально конформно симплектические многообразия

Определение

Локально конформно симплектическое многообразие — это гладкое вещественное многообразие M^{2k}, наделенное невырожденной двумерной формой Ω, которая удовлетворяет равенству

$$d\Omega = \omega \wedge \Omega \Longleftrightarrow d_\omega \Omega = 0.$$

для некоторой замкнутой 1-формы ω, которая называется формой Ли (Lee).

Эквивалентно: на M^{2k} существует невырожденная двумерная форма Ω, открытое покрытие $\{U_j\}$ многообразия M^{2k} и гладкие функции f_j на U_j такие, что форма $e^{-f_j}\Omega$ являются симплектической в окрестности U_j.

Определение

На комплексном многообразии $X = (M, J)$ эрмитова метрика g называется локально конформно кэлеровой (сокращенно LCK), если существует замкнутая одномерная форма θ такая, что фундаментальная двумерная форма Ω, связанная с g, удовлетворяет условию

$$d\Omega = \theta \wedge \Omega \Longleftrightarrow d_\theta \Omega = 0.$$

Определение

LCK эрмитова метрика g на комплексном многообразии (X, J) называется **вайсмановой**, если фундаментальная двумерная форма Ω метрики g параллельна относительно связности Леви-Чивиты метрики g.

Следствие. $H^*_\theta(X) = 0$, где θ – форма Ли (Lee).

Примерами LCK-многообразий являются многообразия Хопфа $S^1 \times S^{2k-1}$, поверхности Иноуэ $\mathcal{S}^0$, $\mathcal{S}^-$ и некоторые широкие подклассы поверхностей Иноуэ $\mathcal{S}^+$, а также некоторые более высокоразмерные аналоги $\mathcal{S}^0$, называемые многообразиями Oeljeklaus-Toma.

Александра Отиман (Math.Z. 2017) вычислила когомологии Морса-Новикова для всех известных компактных комплексных поверхностей с локально конформно кэлеровыми метриками: для поверхностей Иноуэ $\mathcal{S}^0$, $\mathcal{S}^-$, $\mathcal{S}^+$.

Она доказала несуществование метрик LCK-метрик с потенциалом и, в более общем случае, LCK-метрик специального вида на поверхностях Иноуэ и многообразиях Оэльеклауса-Тома.

Литература

- Apostolov, V., Dloussky, G.: Locally conformally symplectic structures on compact non-Kähler complex surfaces. Int. Math. Res. Not. 9, 2717–2747 (2016)
- Bande, G., Kotschick, D.: Contact pairs and locally conformally symplectic structures. Contemp. Math 542, 85–95 (2011)
- Banyaga, A.: On the geometry of locally conformal symplectic manifolds. Infinite dimensional lie groups in geometry and representation theory, pp. 79–91, World Scientific Publishing, Singapore (2002)
- Bazzoni, G., Marrero, J.: Locally conformal symplectic nilmanifolds with no locally conformal Kähler metrics.

Ряд общих свойств когомологий Морса-Новикова

Пусть M^n — компактное n-мерное многообразие, а ω – замкнутая форма на M^n.

- Если $[\omega] = 0$ и M^n связно и ориентируемо, то $H^0_\omega(M^n) = H^n_\omega(M^n) = 0$.
- Двойственность Пуанкаре. Интегрирование:

$$\int : H^p_\omega(M^n) \times H^{n-p}_{-\omega}(M^n,),(\alpha,\beta) \to \int_{M^n} \alpha \wedge \beta$$

  индуцирует изоморфизм $H^p_\omega(M^n) \cong H^{n-p}_{-\omega}(M^n)$.

-

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \dim H^p_\omega(M^n) = \chi(M^n)$$

ТЕОРЕМА. $H^1(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}_1)) = \mathbb{R}\,\alpha, \quad H^2_{-3\alpha}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}_1)) \ni \mathbb{R}\,[\Omega]$,
где $\Omega = \vartheta_{31} \wedge \vartheta_{00} + \vartheta_{21} \wedge \vartheta_{10} + \frac{1}{2}\,\vartheta_{11} \wedge \vartheta_{20}$.

ГИПОТЕЗА.

$$H^2_{\lambda\,\alpha}(\mathrm{Sym}(\mathcal{E}_1)) = \begin{cases} \mathbb{R}\,[\Omega], & \lambda = -3, \\ \{0\}, & \lambda \neq -3. \end{cases}$$

СЛЕДСТВИЕ. Уравнение

$$d\omega = 3\,\alpha \wedge \omega + \Omega$$

совместно с системой уравнений $\mathrm{Sym}(\mathcal{E}_1)$. Мы получаем

$$\omega = \frac{a_1^2}{a_2^3}\,\left(dv - \left(\frac{1}{3}\,v_x^3 - u_x\,v_x - u_y\right)\,dt - v_x\,dx - \left(\frac{1}{2}\,v_x^2 - u_x\right)\,dy\right)$$

Это форма Уолквиста–Эстабрука накрытия уравнения Хохлова–Заболотской.

REMARK: $\vartheta_{30} = \omega \;\Rightarrow\; \Theta_3 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!}\,\vartheta_{3n}$,

Школа Новикова