

Комплексные кобордизмы и n -значные группы

В.М.Бухштабер

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
Математический центр мирового уровня МИАН
buchstab@mi-ras.ru

"Геометрия, топология и математическая физика"
Конференция памяти Сергея Петровича Новикова
Москва, 2–6 июня 2025

Циклы в пространстве

Понятие **цикла** в пространстве X как образа отображения $f: M \rightarrow X$ гладкого замкнутого многообразия содержится в работе А. Пуанкаре (1895).

Цикл считается **гомологичным нулю**, если отображение f продолжается до отображения $W \rightarrow X$, где W – гладкое многообразие с границей $\partial W = M$.

Проблема (N.Steenrod, конец 1940-х)

Пусть X – топологическое пространство и $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ – класс гомологий.

Существуют ли замкнутое гладкое ориентированное многообразие M^n и непрерывное отображение $f: M^n \rightarrow X$, такие, что $f_*[M^n] = z$?

Если ответ положителен, то класс z называется **реализуемым**.

Конструкция Понтрягина–Тома

Понятие **коцикла** опирается на конструкцию Понтрягина–Тома.

Вложению гладких многообразий $i: M_1 \rightarrow M_2$, такому, что $\partial M_1 = \emptyset$ и $i(M_1) \cap \partial M_2 = \emptyset$, сопоставляется отображение $M_2/\partial M_2 \rightarrow T\nu$, где ν – нормальное расслоение вложения i и $T\nu = D\nu/\partial D\nu$ – его пространство Тома, а $D\nu \subset \nu$ – подрасслоение со слоем единичный шар.

Определение коцикла опирается на фундаментальное понятие и свойства трансверсальной регулярности отображения многообразий.

На основе понятий цикла и коцикла строятся **обобщенные теории гомологий и когомологий** – теории бордизмов и кобордизмов, введенные М. Атья в 1961 г.

Комплексные кобордизмы

Теории комплексных бордизмов $U_*(\cdot)$ и кобордизмов $U^*(\cdot)$ используют стабильно комплексные многообразия (U -многообразия), т.е. гладкие многообразия, допускающие вложения $M^n \subset \mathbb{R}^N$ с комплексным нормальным расслоением.

Теорема (J.Milnor, С.П.Новиков, 1960)

$$\Omega_U = U^*(pt) = \mathbb{Z}[a_1, \dots, a_n, \dots], \deg a_n = -2n.$$

В докладе на Международном Математическом Конгрессе (Москва, 1966) С.П.Новиков выдвинул программу приложений теории комплексных кобордизмов к актуальным проблемам алгебраической топологии.

Подробное изложение этой программы см. Изв. АН СССР, сер. мат., 1967.

Результаты С. П. Новикова и его школы по этой программе собраны в томе “Кобордизмы в Советском Союзе”, 1967–1979, М., Ижевск, 2011, 584 стр.

Теория комплексных кобордизмов $U^*(X)$

Теорию $U^*(X)$ связывает с теорией коомологий $H^*(X; \mathbb{Z})$ спектральная последовательность Атья и Хирцебруха с

$$E_2^{*,*}(X) = H^*(X; U^*(pt)) \implies U^*(X).$$

Следствия (теоремы Милнора–Новикова)

- Пусть $Torsion H_*(X; \mathbb{Z}) = 0$. Тогда любой класс $z \in H_n(X; \mathbb{Z})$ реализуется непрерывным отображением $f : M^n \rightarrow X$, где M^n – стабильно комплексное многообразие.
- $U^*(\mathbb{C}P^\infty) = \Omega_U[[u]]$, где $u = c_1^U(\eta)$ – первый класс Черна универсального одномерного комплексного расслоения $\eta \rightarrow \mathbb{C}P^\infty = \varinjlim \mathbb{C}P^n$.
- $U^*(\mathbb{H}P^\infty) = \Omega_U[[x]]$, где $x = p_1^U(\zeta)$ – первый класс Понтрягина–Бореля универсального одномерного кватернионного расслоения $\zeta \rightarrow \mathbb{H}P^\infty = \varinjlim \mathbb{H}P^n$.

Формальная группа геометрических кобордизмов

Теорема (С.П. Новиков, А.С. Мищенко, 1967)

Формальный ряд

$$F_U(u, v) = c_1^U(\eta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \eta_2) = u + v + \sum_{i,j} a_{i,j} u^i v^j, \quad a_{i,j} \in \Omega_U^{-2(i+j-1)},$$

где $u = c_1^U(\eta_1)$, $v = c_1^U(\eta_2)$, задает формальную группу над Ω_U .

$F_U(u, v)$ называется формальной группой **геометрических** кобордизмов.

Теорема (А.С. Мищенко, 1967)

Логарифм группы $F_U(u, v)$ задается рядом

$$g(u) = u + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{C}P^n] \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad \text{т.е. } g(F_U(u, v)) = g(u) + g(v).$$

Характер Черна–Дольда в комплексных кобордизмах

Мультипликативное преобразование теорий когомологий
(характер Черна–Дольда)

$$ch_U : U^*(X) \rightarrow H^*(X, \Omega_U \otimes \mathbb{Q}),$$

однозначно определяется тем, что при $X = \{\text{точка}\}$ оно задает вложение $\Omega_U \subset \Omega_U \otimes \mathbb{Q} : 1 \rightarrow 1 \otimes 1$. Преобразование $ch_U \otimes \mathbb{Q}$ – изоморфизм.

Теорема (Бухштабер, 1970)

Преобразование ch_U однозначно определяется формулой

$$ch_U(u) = \beta(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathcal{B}^{2n}] \frac{z^{n+1}}{(n+1)!},$$

где $u = c_1^U(\eta)$ и $z = c_1^H(\eta)$ – **первые классы Черна** универсального одномерного комплексного расслоения $\eta \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$ и $[\mathcal{B}^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$ – класс кобордизмов U -многообразия $\mathcal{B}^{2n}$ с родом Тодда $Td(\mathcal{B}^{2n}) = (-1)^n$.

Теорема (В.М. Бухштабер, 1970)

Ряд $F_U(u, v)$ задается формулой

$$F_U(u, v) = \frac{u + v + \sum_{i,j} [H_{i,j}] u^i v^j}{\mathbb{C}P(u) \mathbb{C}P(v)}, \quad i \geq 0, j \geq 0, i + j \geq 2,$$

где $\mathbb{C}P(u) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} [\mathbb{C}P^n] u^n$ и $H_{i,j} \subset \mathbb{C}P^i \times \mathbb{C}P^j$ – гладкие неприводимые алгебраические гиперповерхности Милнора.

Следствие

Коэффициенты $a_{i,j}$ ряда $F_U(u, v)$ порождают кольцо Ω_U .

Теорема (В.М. Бухштабер, 1970)

Экспонента группы $F_U(u, v)$ задается рядом

$$\beta(z) = ch_U(u), \quad \text{т.е. } F_U(\beta(z_1), \beta(z_2)) = \beta(z_1 + z_2).$$

Проблема (J.Milnor–F.Hirzebruch, 1958)

Когда в классе кобордизмов $[M^{2n}] \in \Omega_U^{-2n}$ содержится неприводимое гладкое алгебраическое многообразие?

Этот вопрос до сих пор остается открытым.

Теорема (В.М. Бухштабер, А.П. Веселов, 2020)

Коэффициент $[\mathcal{B}^{2n}]$ экспоненты $\beta(z) = ch_U(u)$ формальной группы $F_U(u, v)$ содержит неприводимое гладкое алгебраическое многообразие Θ^n (тэта-дивизор главнополяризованного абелева многообразия).

Универсальная формальная группа

Теорема (М. Lazard, 1955)

Универсальная одномерная коммутативная формальная группа $\mathcal{F}(u, v)$ определена над кольцом $L \cong \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n, \dots]$, которое порождается коэффициентами ряда $\mathcal{F}(u, v)$.

Теорема (D. Quillen, 1969)

Кольцевой гомоморфизм $L \rightarrow \Omega_U$, классифицирующий формальную группу геометрических кобордизмов $F_U(u, v)$, является изоморфизмом.

Двузначные формальные группы (2-ф группы)

Пусть $\zeta \rightarrow \mathbb{H}P^\infty$ – универсальное одномерное кватернионное расслоение. Положим $x = p_1^U(\zeta_1)$, $y = p_1^U(\zeta_2)$,

$$\Theta_k(x, y) = p_k^U(\zeta_1 \otimes_{\mathbb{C}} \zeta_2) \in U^{4k}(\mathbb{H}P^\infty \times \mathbb{H}P^\infty) = \Omega_U[[x, y]], \quad k = 1, 2,$$

где p_k^U , – классы Понтрягина–Бореля в U^* -теории.

Введем кольцо $\Lambda \subset \Omega_U$, порожденное коэффициентами рядов $\Theta_k(x, y)$.

Теорема (В.М. Бухштабер, С.П. Новиков, 1971)

Уравнение $Z^2 - \Theta_1(x, y)Z + \Theta_2(x, y) = 0$, $\Theta_k(x, y) \in \Lambda[[x, y]]$, задает в комплексных кобордизмах коммутативную 2-ф группу над кольцом Λ .

Автор дал аксиоматическое определение n -значных формальных групп (n -ф групп) и развил их теорию в цикле работ.

Теорема (В.М. Бухштабер, 1976)

2-ф группа над Λ в комплексных кобордизмах является универсальной 2-ф группой в классе 2-ф групп над кольцами без кручения при условии $\Theta_2(x, x) = 0$.

Этот результат привел к решению задач алгебраической топологии и стимулировал развитие алгебраической теории n -значных групп.

В настоящее время рядом авторов получены результаты по теории n -значных групп (формальных, конечных, дискретных, топологических, алгебраических, алгебро-геометрических) с приложениями в различных областях математики и математической физики.

Симметрические степени пространства.

Для пространства X обозначим через $(X)^n$ его n -кратную симметрическую степень, т.е. $(X)^n = X^n / \Sigma_n$, где симметрическая группа Σ_n действует перестановкой сомножителей.

Точку в $(X)^n$ будем рассматривать как подмножество в X , состоящее из n точек (возможно с повторениями), т.е. как n -мультимножество.

Пример. Пространства $(\mathbb{C})^n = \mathbb{C}^n / \Sigma_n$ и $\mathbb{C}^n$ можно отождествить при помощи отображения

$$\mathcal{S} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n : (z_1, z_2, \dots, z_n) \rightarrow e_r(z_1, z_2, \dots, z_n), \quad 1 \leq r \leq n,$$

где e_r — r -тый элементарный симметрический полином. Проективизация отображения $\mathcal{S}$ индуцирует гомеоморфизм $(\mathbb{CP}^1)^n \rightarrow \mathbb{CP}^n$.

n -значные группы

n -значное умножение (сложение) на X задаётся отображением

$$\mu : X \times X \rightarrow (X)^n : \mu(x, y) = x * y = [z_1, \dots, z_n], \quad z_k = (x * y)_k.$$

Нейтральный элемент. Точка $e \in X$, такая, что

$$e * x = x * e = [x, x, \dots, x] \quad \text{для всех } x \in X.$$

Обратный элемент. Отображение $\text{inv} : X \rightarrow X$, такое, что

$$e \in \text{inv}(x) * x \quad \text{and} \quad e \in x * \text{inv}(x) \quad \text{для всех } x \in X.$$

Ассоциативность. n^2 -множества

$$\begin{aligned} &[x * (y * z)_1, x * (y * z)_2, \dots, x * (y * z)_n], \\ &[(x * y)_1 * z, (x * y)_2 * z, \dots, (x * y)_n * z] \end{aligned}$$

совпадают для всех $x, y, z \in X$.

Коммутативность. n -множества $x * y$ и $y * x$ совпадают для всех $x, y \in X$.

Отображение μ определяет структуру n -значной группы на X , если оно ассоциативно и существуют e и inv .

Определение

$(n, 1)$ -значным кольцом называется множество X с операциями $\mu : X \times X \rightarrow (X)^n : \mu(x, y) = x * y$ и $\xi : X \times X \rightarrow X : \xi(x, y) = x \cdot y$, такими, что μ задает в X структуру n -значной коммутативной группы, а ξ – структуру 1-значной полугруппы с условием двухсторонней дистрибутивности:

Пусть $x * y = [z_1, \dots, z_n]$. Тогда для любых x, y и u из X

$$(x * y) \cdot u = [z_1 \cdot u, \dots, z_n \cdot u] = (x \cdot u) * (y \cdot u),$$

$$u \cdot (x * y) = [u \cdot z_1, \dots, u \cdot z_n] = (u \cdot x) * (u \cdot y).$$

Структура 2-значной группы и $(2, 1)$ -кольца на $\mathbb{Z}_+$.

Рассмотрим полугруппу по сложению неотрицательных целых чисел $\mathbb{Z}_+$.
Введем 2-значное коммутативное сложение на $\mathbb{Z}_+$

$$\mu: \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}_+ \rightarrow (\mathbb{Z}_+)^2 : x * y = [x + y, |x - y|].$$

Нейтральный элемент: $e = 0$.

Обратный элемент: $\text{inv}(x) = x$.

Ассоциативность: 4-множества

$$(x * y) * z = [x + y + z, |x - y - z|, x + |y - z|, |x - |y - z||]$$

и

$$x * (y * z) = [x + y + z, |x + y - z|, |x - y| + z, ||x - y| - z|]$$

совпадают для любых $x, y, z \in \mathbb{Z}_+$.

2-значная группа $\mathbb{Z}_+$ с обычным умножением $\cdot$ чисел является $(2, 1)$ -кольцом.

Конструкции n -значных групп.

Для любого $m \in \mathbb{N}$, n -значную группу X с операцией μ_n можно рассматривать как mn -значную группу с операцией

$$\mu_n^m : X \times X \xrightarrow{\mu_n} (X)^n \xrightarrow{(D)^m} (X)^{mn}, \text{ где } D - \text{диагональ.}$$

Определение

Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется **гомоморфизмом n -значных групп**, если

$$f(e_X) = e_Y, \quad f(\text{inv}_X(x)) = \text{inv}_Y(f(x)) \quad \text{для всех } x \in X,$$

$$\mu_Y(f(x), f(y)) = (f)^n \mu_X(x, y) \quad \text{для всех } x, y \in X.$$

Определение

n -значная группа X называется **приводимой**, если существует изоморфизм $f: X \rightarrow Y$, где Y — n -значная группа с операцией $\mu_n = \mu_k^m$, $n = mk$.

Косетные группы.

Пусть G – некоторая (1-значная) группа с умножением μ_1 , единицей e_G и обратным отображением $\text{inv}_G(u) = u^{-1}$.

Пусть A , $|A| = n$, – некоторая конечная подгруппа группы автоморфизмов $\text{Aut } G$.

Введем пространство орбит $X = G/A$ группы G по действию группы A и фактор-отображение $\pi: G \rightarrow X$.

Определим n -значное умножение

$$\mu: X \times X \rightarrow (X)^n : \mu(x, y) = [\pi(\mu_0(u, v^a)), a \in A],$$

где $u \in \pi^{-1}(x)$, $v \in \pi^{-1}(y)$ и v^a – образ действия элемента $a \in A$ на $v \in G$.

Теорема

Умножение μ задает на $X = G/A$ структуру n -значной **косетной группы** (G, A) с единицей $e_X = \pi(e_G)$ и однозначно определенным отображением $\text{inv}(x) = \pi(u^{-1})$, где $\pi(u) = x$.

Классификационная теорема

Двузначная группа на множестве X называется **инволютивной**, если мультимножество $x * y$ содержит единицу e **тогда и только тогда**, когда $x = y$.

Теорема (В.М.Бухштабер, А.П.Веселов, А.А.Гайфуллин, 2022)

- 1) Определены три серии конечно порождённых инволютивных коммутативных двузначных групп: основная, унипотентная и специальная.
- 2) Любая конечно порождённая инволютивная коммутативная двузначная группа изоморфна двузначной группе, принадлежащей одной из этих серий.

Теорема (А.А. Гайфуллин, 2024)

Всякая инволютивная двузначная группа коммутативна.

Алгебраические n -значные группы

Определение

Алгебраической n -значной группой называется алгебраическое многообразие X с n -значной операцией μ , которая определена на некотором плотном подмножестве $Y \subset X \times X$ в топологии Зарисского и удовлетворяет аксиомам n -значных групп.

Теория алгебраических n -значных групп и её связь с теорией интегрируемых динамических систем дискретного времени была развита в работах В.М.Бухштабера и А.П.Веселова.

Положим

$$P(z; x, y) = \sum_{k=0}^n F_k(x, y) z^{n-k}, \quad (1)$$

где $F_k(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ и

$$F_0(0, 0) = 1. \quad (2)$$

Тогда определена операция $*$, которая сопоставляет элементам x и y на множестве комплексных чисел $\mathbb{C}$ мультимножество $x * y$ корней полинома (1) от переменной z .

Следствия из аксиом.

Из аксиомы нейтрального элемента $x = 0$ следует равенство

$$P(z; 0, y) = F_0(0, y)(z - y)^n. \quad (3)$$

Аксиома обратного элемента говорит о существовании алгебраического отображения $\text{inv} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, такого, что для каждого $x \in \mathbb{C}$

$$F_n(x, \text{inv}(x)) = F_n(\text{inv}(x), x) = 0. \quad (4)$$

Введем алгебраическую функцию $z(x, y) = [z_1(x, y), \dots, z_n(x, y)]$, где $z_j = z_j(x, y)$, $j = 1, \dots, n$, – корни полинома P .

В терминах теории **расширения полей алгебраических функций** условие ассоциативности записывается в виде тождественного равенства двух полиномов от переменной t

$$\prod_{i,j=1}^n (t - z_i(z_j(x, y), z)) = \prod_{i,j=1}^n (t - z_i(x, z_j(y, z))). \quad (5)$$

Уравнение ассоциативности

Положим $R_k(x, y) = \frac{F_k(x, y)}{F_0(x, y)}$.

Заметим, что

$$\prod_{i,j=1}^n (t - z_i(z_j(x, y), z)) = \prod_{j=1}^n \left(t^n + \sum_{k=1}^n R_k(z_j(x, y), z) t^{n-k} \right).$$

Следствие

Коэффициенты полиномов от t в уравнении ассоциативности (5)

$$\prod_{j=1}^n \left(t^n + \sum_{k=1}^n R_k(z_j(x, y), z) t^{n-k} \right) = \prod_{j=1}^n \left(t^n + \sum_{k=1}^n R_k(x, z_j(y, z)) t^{n-k} \right)$$

являются рациональными функциями от переменных x , y и z .

Универсальная n -значная алгебраическая группа

Пусть $\mathcal{R}_n = \mathbb{C}[a_{i,j,k} : 0 \leq i, j \leq n_k, 0 \leq k \leq n]$. Рассмотрим полином

$$\Pi_n(z; x, y) = \sum_{k=0}^n \mathcal{F}_k(x, y) z^{n-k}, \quad \text{где } \mathcal{F}_k(x, y) = \sum a_{i,j,k} x^i y^j \in \mathcal{R}_n[x, y].$$

Предложение

В кольце $\mathcal{R}_n$ однозначно определен идеал $\mathcal{I}_n$, такой, что полином

$$\Pi_n^*(z; x, y) = \sum_{k=0}^n \mathcal{F}_k^*(x, y) z^k$$

задает **универсальную** коммутативную n -значную алгебраическую группу над кольцом $\mathcal{U}_n = \mathcal{R}_n / \mathcal{I}_n$, где $\mathcal{F}_k^*(x, y) = \sum a_{i,j,k}^* x^i y^j \in \mathcal{U}_n[x, y]$, $a_{i,j,k}^* = \pi(a_{i,j,k})$ и $\pi : \mathcal{R}_n \rightarrow \mathcal{U}_n$ – каноническая проекция.

Согласно определению, для **любой** n -значной алгебраической группы с полиномом $P(z; x, y) = \sum_{k=0}^n F_k(x, y) z^{n-k}$ над **любой** коммутативной $\mathbb{C}$ -алгеброй K **однозначно** определен кольцевой гомоморфизм $\varphi : \mathcal{U}_n \rightarrow K$, при котором $\varphi^*(\Pi_n^*(z; x, y)) = P(z; x, y)$, т. е. $F_k(x, y) = \sum \varphi(a_{i,j,k}^*) x^i y^j$.

n -алгебраические n -значные группы

Определение

Назовем n -алгебраической n -значной группой на $\mathbb{C}$ алгебраическую n -значную группу с умножением

$$\begin{aligned} * : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \setminus \{(x, y) \mid F_0(x, y) = 0\} &\longrightarrow \text{Sym}^n(\mathbb{C}), \\ (x, y) &\longmapsto [z_1, \dots, z_n] \end{aligned}$$

где z_j – корни полинома (1), такого, что каждая из переменных x и y входит в него **в степени не выше n** , и этот полином удовлетворяет условиям (2), (3), (4) и (5).

Соответствующую группу будем обозначать через $\mathbb{G}(P)$.

Определение

n -алгебраическая n -значная группа называется **симметрической**, если полином $P(z; (-1)^n x, (-1)^n y)$ является симметрическим по x, y, z .

Симметрические 1-алгебраические 1-значные группы

Из условия $F_0(0,0) = 1$ следует, что n -алгебраическая n -значная группа на $\mathbb{C}$ является **формальной n -значной группой** на $\mathbb{C}$ так как операция μ определена в окрестности $0 \in \mathbb{C}$.

Она определена на всем $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда $F_0(x,y) \equiv 1$.

Предложение

Универсальная симметрическая 1-алгебраическая 1-значная группа $\mathbb{G}(\Pi_1)$ определена над $\mathbb{C}[\alpha]$ и задается полиномом

$$\Pi_1(z; x, y) = (1 + \alpha xy)z - x - y.$$

Она изоморфна алгебраической 1-значной группе матриц вида $\begin{pmatrix} 1 & x \\ \alpha x & 1 \end{pmatrix}$ с точностью до умножения на ненулевые комплексные числа, так как

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ \alpha x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ \alpha y & 1 \end{pmatrix} = (1 + \alpha xy) \begin{pmatrix} 1 & \frac{x+y}{1+\alpha xy} \\ \alpha \frac{x+y}{1+\alpha xy} & 1 \end{pmatrix}.$$

Симметрические 2-алгебраические 2-значные группы

Теорема (В.М. Бухштабер, М.И. Корнев, 2025)

Универсальная симметрическая 2-алгебраическая 2-значная группа $\mathbb{G}(\Pi_2^*)$ определена над кольцом коэффициентов

$$\mathbb{C}[k_2, k_4, k_6, k_8]/(4k_8 - k_4^2 + k_6k_2) \cong \mathbb{C}[k_2, k_4, k_6],$$

и задается симметрическим полиномом

$$\Pi_2^*(z; x, y) = e_1^2 - 4e_2 + [2k_2 + 2k_4e_1 + 2k_6e_2 + (k_4^2 - k_6k_2)e_3]e_3.$$

Доказательство теоремы получено согласно определению универсального семейства при помощи [системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica](#).

Впервые этот результат был получен В.М.Бухштабером и А.П.Веселовым как следствие классификации двузначных формальных групп.

Симметрические 3-алгебраические 3-значные группы

Теорема (В.М. Бухштабер, М.И. Корнев, 2025)

Существует два класса универсальных симметрических 3-алгебраических 3-значных групп:

- 1 $\Pi_3^{*,1}(z; -x, -y) = e_1^3 - 27e_3$. В этом случае мы получаем 3-значную группу $\mathbb{G}_3$.
- 2 $\Pi_3^{*,2}(z; -x, -y) = (e_1 + \alpha e_3)^3$. В этом случае соответствующая 3-значная группа получается диагональной конструкцией

$$G \times G \xrightarrow{\mu} G \xrightarrow{\text{Sym}^3 \circ \text{diag}} \text{Sym}^3(G)$$

из универсальной симметрической 1-алгебраической 1-значной группы $G(\Pi_1)$, построенной по полиному

$$\Pi_1^*(z; -x, -y) = (1 + \alpha xy)z + x + y = e_1 + \alpha e_3.$$

Этот **новый результат** получен согласно определению универсального семейства при помощи **системы компьютерной алгебры** Wolfram Mathematica.

Обобщение двойственности Понтрягина

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством неприводимых унитарных представлений конечной группы G и множеством $X = G/G$ классов сопряжённости группы G .

Теорема (В.М. Бухштабер, 2006)

- 1) Действие конечной группы G на себе внутренними автоморфизмами задает на $X = G/G$ структуру коммутативной косетной m -значной группы, где $m = |G|$.
- 2) Тензорное произведение неприводимых представлений $\rho_0, \dots, \rho_k$ группы G задает на $X = G/G = \{x_0, \dots, x_k\}$ структуру коммутативной n -значной группы, где $x_i = \rho_i/d_i$, $x_0 = e$, и $n = \text{НОК}\{d_i d_j \mid d_i = \dim \rho_i\}$.

Для коммутативной группы G : $m = n = 1$.

Для $G = \Sigma_3$ получаем на $X = \{x_0, x_1, x_2\}$ неприводимые 3!-значную и 4-значную группы.

Для $G = \Sigma_4$ получаем на $X = \{x_0, \dots, x_4\}$ неприводимые 4!-значную и 18-значную группы.

Приложения теории n -значных групп

Классические результаты из разных областей математики получили новые взаимосвязи и приложения на основе теории n -значных групп.

Теорема (В.М. Бухштабер, А.П. Веселов, 1996)

Все алгебраические действия 2-значной группы $\mathbb{Z}_+$ на $\mathbb{C}P^1$ порождаются либо соответствием Эйлера–Шаля, либо его вырождениями.

Теорема (V.Dragović, 2010)

Уравнение ассоциативности для 2-значной группы объясняет механизм интегрирования волчка Ковалевской.

n -значные группы $\mathbb{G}_n$ на $\mathbb{C}$.

Пусть $\varepsilon = \exp \frac{2\pi i}{n}$. Введем n -значное косетное сложение

$$\mu: \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow (\mathbb{C})^n : x * y = [z_1, \dots, z_n], \quad z_k = (\sqrt[n]{x} + \varepsilon^k \sqrt[n]{y})^n.$$

Единица: $e = 0$. Обратный элемент: $\text{inv}(x) = (-1)^n x$.

Получаем коммутативные алгебраические n -значные группы $\mathbb{G}_n$ с законом $p_n(z; x, y) = 0$, где

$$p_n(z; x, y) = (z - z_1) \cdots (z - z_k)$$

полиномы с целыми коэффициентами. Первые полиномы:

$$p_1 = z - x - y,$$

$$p_2 = (z + x + y)^2 - 4(xy + yz + zx),$$

$$p_3 = (z - x - y)^3 - 27xyz,$$

$$p_4 = ((z + y + x)^2 - 4(xy + yz + zx))^2 - 2^7(z + y + x)xyz.$$

Полином $p_n(z; (-1)^n x, (-1)^n y)$ является **симметрическим** по x, y, z и **однородным**.

Полиномы $P_n(e_1, e_2, e_3)$ и простые числа

Положим $P_n(e_1, e_2, e_3) = p_n(z; (-1)^n x, (-1)^n y)$, где e_1, e_2, e_3 – элементарные симметрические полиномы.

$$P_5 = e_1^5 - 5^4 e_3(e_1^2 - 5e_2),$$

$$P_6 = e_1^6 - 2^2 \cdot 3 e_1^4 e_2 - 2 \cdot 3^4 \cdot 17 e_1^3 e_3 + 2^4 \cdot 3 e_1^2 e_2^2 - \\ - 2^3 \cdot 3^4 \cdot 19 e_1 e_2 e_3 - 2^6 e_2^3 + 3^3 \cdot 19^3 e_3^2,$$

$$P_7 = e_1^7 - 7^4 e_3(5e_1^4 - 2 \cdot 7^2 e_1^2 e_2 - 7^4 e_1 e_3 + 7^3 e_2^2),$$

$$P_{11} = e_1^{11} - 11^4 e_3(5 \cdot 53 e_1^8 - 2 \cdot 11^2 \cdot 197 e_1^6 e_2 - 11^3 \cdot 61 \cdot 1499 e_1^5 e_3 + \\ + 2 \cdot 11^4 \cdot 41 e_1^4 e_2^2 - 11^5 \cdot 17 \cdot 2957 e_1^3 e_2 e_3 - 5 \cdot 11^6 e_1^2 e_2^3 + \\ + 2 \cdot 11^6 \cdot 67^3 e_1^2 e_3^2 - 2^2 \cdot 7 \cdot 11^7 \cdot 67 e_1 e_2^2 e_3 + 11^7 e_2^4 - 11^7 \cdot 67^3 e_2 e_3^2).$$

Сопоставим числу n набор простых чисел, которые возникают как делители коэффициентов полиномов $P_n(e_1, e_2, e_3)$.

Вопрос:

Какие закономерности в этом сопоставлении?

Группы G_n и полиномы $p_n(z; x, y)$

Группы G_n и полиномы $p_n(z; x, y)$ возникают в различных областях математики и математической физики.

В работе В.М. Бухштабера, А.Н. Холодова, 1989, полиномы $p_n(z; x, y)$ описывают сдвиги T_x^y на **однородных коалгебрах** с собственными функциями $b_n(\lambda x)$, которые являются гипергеометрическими функциями, где

$$T_x^y : Q[[x]] \rightarrow Q[[x, y]], \quad T_x^y b_n(x) = b_n(x) b_n(y),$$
$$b_n(x) = {}_0F_{n-1} \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}; \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} x \right).$$

Получаем:

$$b_1(x) = e^x, \quad b_2(x) = ch(\sqrt{2x}),$$

где $ch(x)$ – гиперболический косинус.

В работе I. Gaiur, V. Rubtsov, D. van Straten, 2024, описана связь полиномов $p_n(z; x, y)$ с **мультипликативными ядрами** в смысле Концевича, бесселевыми ядрами и потенциалами в модели Ландау–Гинзбурга.

Определение

Пусть A и B — произвольные квадратные матрицы над полем $\mathbb{C}$ порядков m и n соответственно.

Кронекеровой суммой $A \boxplus B$ матриц A и B называется $(mn \times mn)$ -матрица

$$A \boxplus B = A \otimes I_n + I_m \otimes B.$$

Суммы Кронекера важны в различных задачах теории дифференциальных уравнений, квантовых вычислений, машинного обучения, робототехники.

Они используются в исследованиях матричных уравнений (Риккати, Ляпунова, Сильвестра) и матричных разностных операторов на сетках.

Например, в терминах суммы Кронекера формулируется критерий существования и единственности решения матричного уравнения

$$AX + XB = C.$$

Собственные значения матриц и суммы Кронекера

Рассмотрим мультимножества $[\lambda_1, \dots, \lambda_m]$ и $[\mu_1, \dots, \mu_n]$ собственных значений матриц A и B .

Предложение (С. Stephanos, 1900)

Пусть $p(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\ell} c_{jk} x^j y^k \in \mathbb{C}[x, y]$. Тогда

$$[p(\lambda_r, \mu_s), r = 1, \dots, m, s = 1, \dots, n] -$$

мультимножество собственных значений матрицы

$$p(A, B) = \sum_{j,k=0}^{\ell} c_{jk} A^j \otimes B^k.$$

Следствие

$[\lambda_r + \mu_s, r = 1, \dots, m, s = 1, \dots, n]$ – мультимножество собственных значений суммы Кронекера $A \boxplus B$.

Фробениусовы сопровождающие матрицы

Определение

Фробениусовой сопровождающей матрицей $F(a_{n-1}, \dots, a_0)$ полинома $f(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{C}[t]$ называется матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Аналогично определяется Фробениусова сопровождающая блочная матрица $F(A_{n-1}, \dots, A_0)$ матричного полинома

$$f(t) = t^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_0 \in \text{Mat}_m(\mathbb{C})[t].$$

Фробениусовы матрицы и суммы Кронекера

Введём характеристический полином $(n \times n)$ -матрицы A

$$\chi(t; A) = \det(tI_n - A),$$

где I_n – единичная $(n \times n)$ -матрица. Мультимножество корней полинома $\chi(t; A)$ совпадает с мультимножеством собственных значений матрицы A .

Пусть $f(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0$. Тогда $\chi(t; F(a_{m-1}, \dots, a_0)) = f(t)$.

Предложение

Пусть $[\lambda_j]$ и $[\mu_k]$ – мультимножества корней полиномов

$$f(t) = t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \dots + a_0 \text{ и } g(t) = t^n + b_{n-1}t^{n-1} + \dots + b_0.$$

Тогда $[\lambda_j + \mu_k]$ является мультимножеством корней характеристического полинома степени mn

$$\chi(t; F(a_{m-1}, \dots, a_0) \boxplus F(b_{n-1}, \dots, b_0)).$$

Предложение (В.М. Бухштабер, М.И. Корнев, 2025)

- (1) Для x, y, z и $t^n = z$ выполняется равенство

$$p_n(z; x, y) = \chi\left(t; \underbrace{F(0, \dots, 0, -x)}_n \boxplus \underbrace{F(0, \dots, 0, -y)}_n\right).$$

- (2) Полином $p_n(z; (-1)^n x, (-1)^n y)$ симметричен по переменным x, y и z .
- (3) $p_n(z; x, y)$ является однородным полиномом степени n с целыми коэффициентами по переменным x, y и z .

Теорема Вендта

Определение

Матрицей Вендта W_n называется циркулянт полинома $(1+x)^n - x^n$

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \cdots & \binom{n}{n-1} \\ \binom{n}{n-1} & 1 & \binom{n}{1} & \cdots & \binom{n}{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Теорема (E. Wendt, 1894)

Пусть $p > 3$ – простое и $q = 2kp + 1$ – простое при некотором $k \geq 1$. Тогда существуют целые a, b, c , не делящиеся на q , такие, что

$$a^p + b^p + c^p \equiv 0 \pmod{q}$$

тогда и только тогда, когда q является делителем числа $\det W_{2k}$.

n -допустимые простые числа

Теорема (J. Dirichlet, 1837)

Пусть m и n – натуральные взаимно простые числа.
Существует бесконечное множество простых чисел q в арифметической прогрессии $m + kn$.

Определение

Простое число q называется n -допустимым тогда и только тогда, когда уравнение $x^n = 1$ имеет n решений в кольце целых q -адических чисел $\mathbb{Z}_q$.

Каждое простое число q является 2-допустимым.

Предложение

Простое число $q > n$ является n -допустимым тогда и только тогда, когда оно принадлежит арифметической прогрессии $1 + kn$.

Обозначим через $\mathcal{X}_q^n \subset \mathbb{Z}_q$ образ отображения $\mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_q : a \rightarrow x = a^n$.

Следствие

Для **каждого** n -допустимого **простого** числа $q > n$ множество $\mathcal{X}_q^n$ является $(n, 1)$ -кольцом с n -значным **косетным** сложением, задаваемым автоморфизмом n -того порядка $\varepsilon : \mathbb{Z}_q \rightarrow \mathbb{Z}_q : a \rightarrow \varepsilon a$, где $\varepsilon^n = 1$, и 1-значным умножением в $\mathcal{X}_q^n$, задаваемым обычным умножением в $\mathbb{Z}_q$.

Пример. $n = 3$, $q = 7$, $\varepsilon \in \mathbb{Z}_7$, где $\varepsilon^3 = 1$ и $\varepsilon \equiv 2 \pmod{7}$.

Сложение в $(3, 1)$ -значном кольце $\mathcal{X}_7^3 \subset \mathbb{Z}_7$:

$x * y = [z_1, z_2, z_3]$, где $x = a^3$, $y = b^3$, $z_k = c_k^3$ и $c_k = a + \varepsilon^k b \in \mathbb{Z}_7$, $k = 1, 2, 3$.

Матрицы $W_n(z; x, y)$

Определение

y -циркулянт $\text{Circ}_y(a_0, \dots, a_{n-1})$ называется матрица Теплица

$$\text{Circ}_y(a_0, \dots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & ya_1 & ya_2 & \cdots & ya_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & ya_1 & \ddots & \vdots \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \ddots & ya_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & ya_1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

Определение (В.М. Бухштабер, М.И. Корнев, 2025)

Матрицей $W_n(z; x, y)$ называется y -циркулянт, у которого

$$a_0 = w^n + (-1)^{n+1}x + y, \quad a_k = \binom{n}{k}w^k, \quad k = 1, \dots, n-1, \quad w^n = z.$$

Группы $\mathbb{G}_n$ и матрицы Вендта W_n

Теорема (*) (В.М. Бухштабер, М.И. Корнев, 2025)

- (1) Полином $p_n(z; x, y)$, задающий сложение в n -значной группе $\mathbb{G}_n$, является детерминантом матрицы $W_n(z; x, y)$.
- (2) $W_n(1; (-1)^n x, 1) = W_n - tI_n$, где $t = x - 1$ и W_n – матрица Вендта.

Следствие

$\chi(t, W_n) = p_n(x; (-1)^n, (-1)^n)$, где $t = (-1)^n x - 1$, $W_n = W_n(1; (-1)^n, 1)$.

Приложение теоремы Вольстенхольма

Теорема (В.М. Бухштабер, М.И. Корнев, 2025)

При простых $n \geq 5$ многочлен

$$p_n(z; (-1)^n x, (-1)^n y) - (x + y + z)^n$$

делится на n^4xyz .

Доказательство основывается на нашей теореме (*) и классическом результате:

Теорема (J. Wolstenholme, 1862)

Число

$$\binom{2n-1}{n-1} - 1$$

делится на n^3 для простых $n \geq 5$.

Разложение по степеням e_1

Теорема (В.М. Бухштабер, М.И. Корнев, 2025)

Для каждого простого числа $n \geq 5$ существует функция $\xi_n : [0, n-3] \rightarrow \mathbb{Z}$, такая, что $\xi_n(k) = 0$, $k = 0, 1$; $\xi_n(k) > 0$, $k > 1$; $\xi_n(n-3) = n-4$ и

$$p_n(z; -x, -y) = p_n(e_1, e_2, e_3) = e_1^n - n^4 e_3 \left(\sum_{k=0}^{n-3} n^{\xi_n(k)} \pi_{n,k}(e_2, e_3) e_1^{n-k-3} \right),$$

где

$$\pi_{n,k}(e_2, e_3) = \sum_{2i+3j=k} \alpha_{n,i,j} e_2^i e_3^j, \quad i \geq 0, j \geq 0, \quad \alpha_{n,i,j} \in \mathbb{Z}, \quad (\pi_{n,k}(e_2, e_3), n) = 1.$$

Примеры:

$$\xi_5 : [0, 2] \rightarrow (0, 0, 1);$$

$$\xi_7 : [0, 4] \rightarrow (0, 0, 2, 4, 3);$$

$$\xi_{11} : [0, 8] \rightarrow (0, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7);$$

$$\xi_{13} : [0, 10] \rightarrow (0, 0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9),$$

где $\pi_{13,9}(e_2, e_3) = \alpha_{13,3,1} e_2^3 e_3 + 13\alpha_{13,0,3} e_3^3$ и $(\alpha_{13,3,1}, 13) = 1$, $(\alpha_{13,0,3}, 13) = 1$.



J. Wolstenholme,

On certain properties of prime numbers.

The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics, 5 (1862), 35–39.



E. Wendt,

Arithmetische Studien über den 'letzten' Fermatschen Satz, welcher aussagt, dass die Gleichung $a^n = b^n + c^n$ für $n > 2$; in ganzen Zahlen nicht auflösbar ist.

Journal für die reine und angewandte Mathematik, 113, 1894, 335–347.



В.М.Бухштабер, С.П.Новиков,

Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса.

Матем. Сб., 84(126):1 (1971), 81–118.



В.М.Бухштабер,

Двузначные формальные группы. Алгебраическая теория и приложения к кобордизмам. I; II.

Изв. АН СССР. Сер. матем., 39:5, 1975, 1044–1064; 40:2, 1976, 289–325.



В.М.Бухштабер, А.Н.Холодов,

Группы формальных диффеоморфизмов суперпрямой, производящие функции для последовательностей полиномов и функциональные уравнения.

Изв. АН СССР, сер. мат., 53:5, М., 1989, 944–970.



V.M.Buchstaber, A.P.Veselov,

Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups.

Internat. Math. Res. Notices, N 8, 1996, 381–400.



V.M.Buchstaber,

n -valued groups: theory and applications.

Moscow Math. J., 6:1, 2006, 57–84.



В.М.Бухштабер, А.П.Веселов,

Топограф Конвея, $PGL_2(\mathbb{Z})$ -динамика и двузначные группы.

УМН, 74:3(447), 2019, 17–62.



В.М.Бухштабер, А.А.Гайфуллин, А.П.Веселов,

Классификация инволютивных коммутативных двузначных групп.

УМН, 77:4(466) (2022), 91–172.



В.М.Бухштабер, А.Ю.Веснин,

n -значные группы, разветвленные накрытия и трехмерные гиперболические многообразия.

Матем. сб., 215:11 (2024), 3–32.



V.M.Buchstaber, A.P.Veselov,

Chern–Dold character in complex cobordisms and theta divisors.

Advances in Mathematics, 449 (2024), 109720, 35 pp.



I.Gaiur, V.Rubtsov, D.van Straten,

Product formulas for the Higher Bessel functions.

arXiv:2405.03015v1 [math.AG] 5 May 2024.



V.M.Buchstaber, I.Yu.Gaiur, V.N.Rubtsov,

Algebraic 2-valued group structures on P^1 , Kontsevich-type polynomials, and multiplication formulas. I.

Изв. РАН. Сер. матем., 2026, №1; arXiv:2412.07330v1 [math.AG] 10 Dec 2024.



Victor Buchstaber, Mikhail Kornev,

n -Valued Groups, Kronecker Sums, and Wendt's (x, y, z) -Matrices.

arXiv:2505.04296v1 [math.GR] 7 May 2025.

Спасибо за внимание!