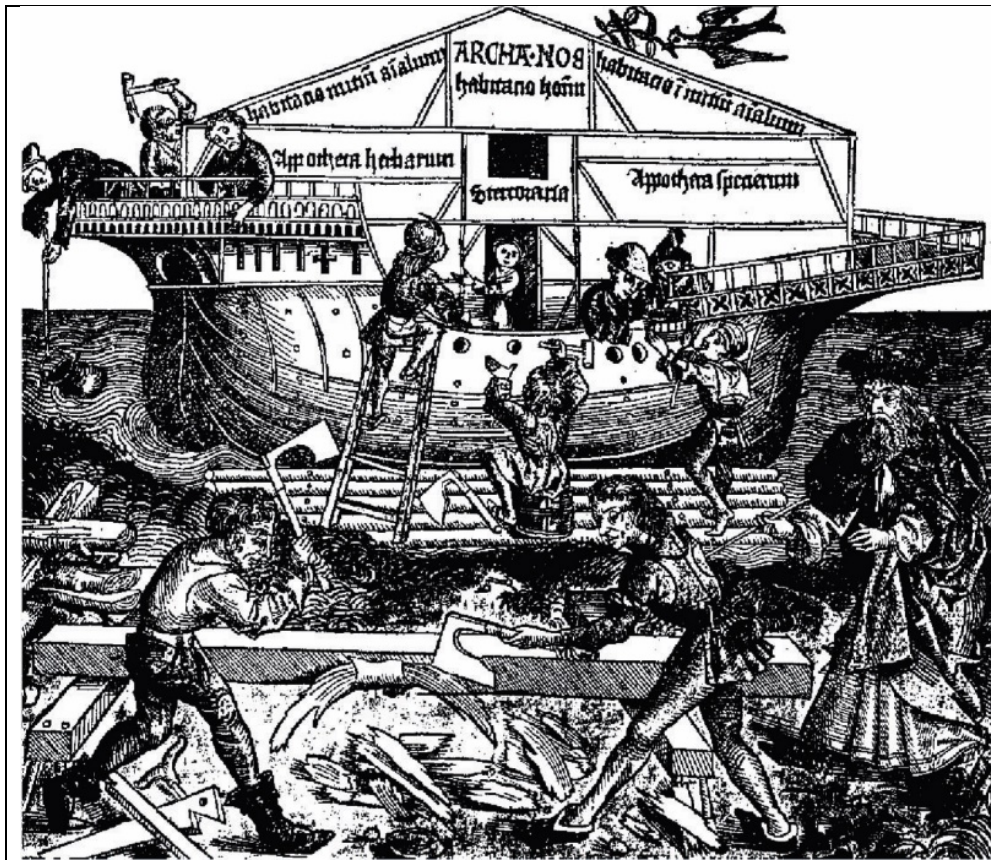


## Задачи прогноза и задачи оценки климатических изменений

В.А.Гордин НИУ «Высшая школа экономики» & Гидрометцентр России & МФТИ

*Наука начинается с тех пор, как начинают измерять. Точная наука немислима без меры*

*Д.И.Менделеев*

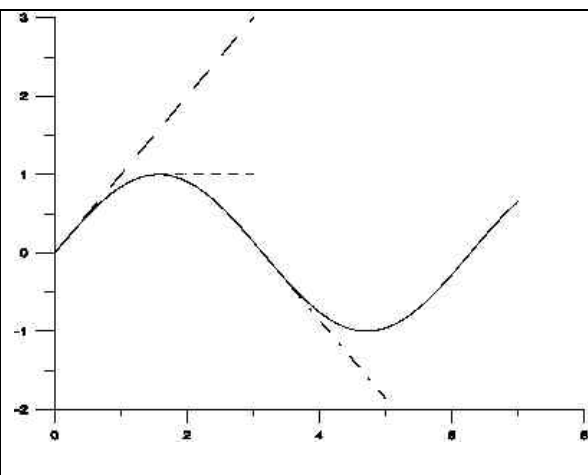


Строительство Ноева ковчега - гравюра Антона Кобергера из ``Всемирной хроники Хартмана Шеделя'', Nuremberg, 1493. Ноаху (Ною) и его современникам прогноз был дан с заблаговременностью 100 лет. И в отличие от современников, Ноах принял его всерьез...

Тема изменения климата на планете в последние десятилетия вышла далеко за пределы чисто научного обсуждения. Она влияет на общественное мнение, экономику и политику. При этом основной практический интерес состоит в возможности долгосрочного прогноза таких изменений.

Простейший способ такого прогноза – экстраполяция по времени метеорологических параметров атмосферы и океана. И самые простые для измерений и важные для различных приложений из этих параметров – приземная температура и количество осадков. Но экстраполяция, особенно на длинные сроки, приводит к большим ошибкам...

Рис.1. Линейная экстраполяция периодической функции в различные моменты времени приводит к «разнообразным» результатам...



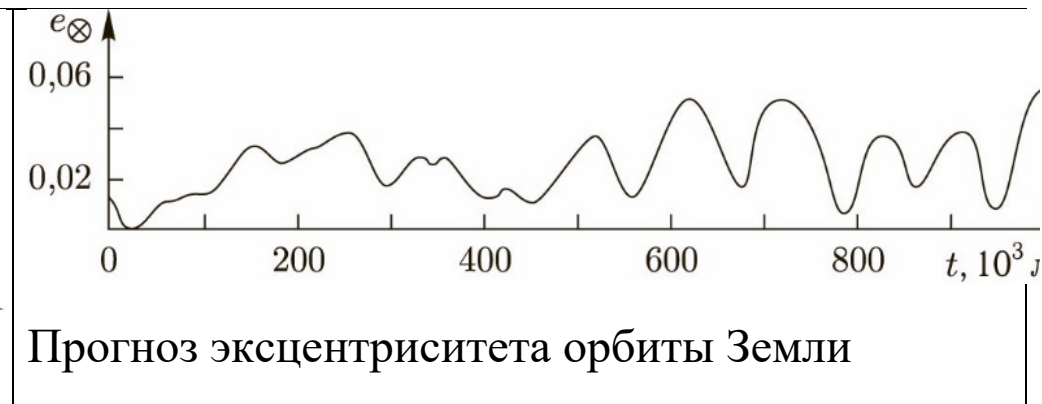
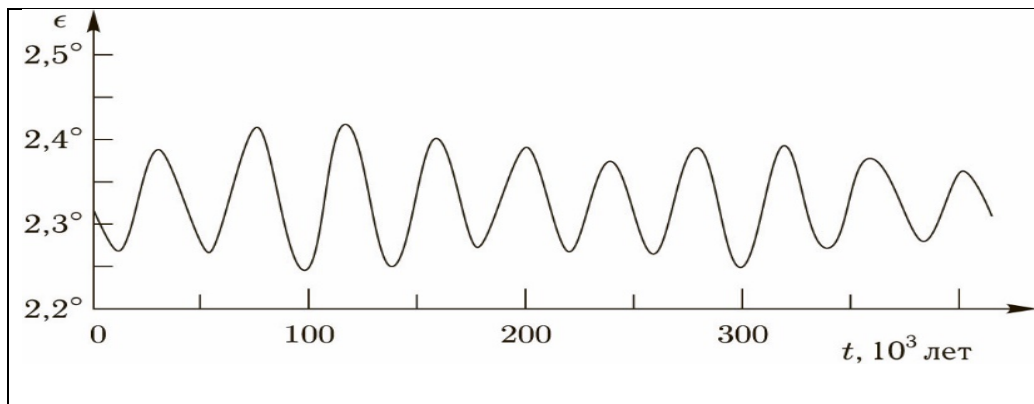
Недостатки такого способа прогнозирования очевидны. Мы знаем (об этом свидетельствует, в частности, археология), что на протяжении последних двух тысячелетий периоды длительного похолодания и потепления, периоды влажные и

засушливые, сменяли друг друга. Следовательно, линейная экстраполяция температуры, влажности, облачности или количества осадков по времени существенно бы зависела от момента, в который производится такая экстраполяция, и, очевидно, приводила бы к совершенно неадекватному долгосрочному прогнозу.

Попытки статистически выявить возможную «периодичность» с периодом в несколько веков упираются в отсутствие столь долгосрочных архивов наблюдений. Разумеется, сохраняются возможности косвенных наблюдений (археологические изыскания, оценка толщины древесных колец, взятие проб многовекового льда и т. п.)

Важным способом является создание математических моделей, отвечающих большому временному (а значит, и пространственному) масштабу явлений. Они должны описывать как внутренние атмосферные процессы, так и процессы взаимодействия атмосферы с океаном, почвой, биотой и космосом.

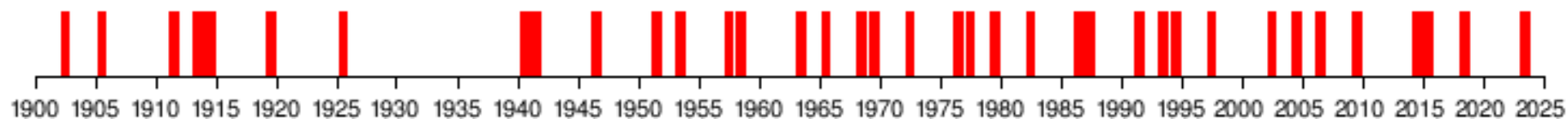
Например, могут влиять параметры орбиты Земли. Угол наклона оси вращения и плоскости эклиптики или эксцентриситет эллиптической орбиты. Периоды колебаний составляют  $\sim 10^5$  лет.



Прогноз эксцентриситета орбиты Земли

Прогноз угла между осью вращения Земли и плоскостью эклиптики. Динамика - результат взаимной гравитации Солнца, Луны и планет. Полный угловой момент Солнечной системы постоянен, а между планетами существует обмен. Характерные периоды такого обмена на много порядков превосходят те несколько веков, которые человечество ведет метеонаблюдения

Оценить влияние этих факторов по доступным нам метеонаблюдениям затруднительно.

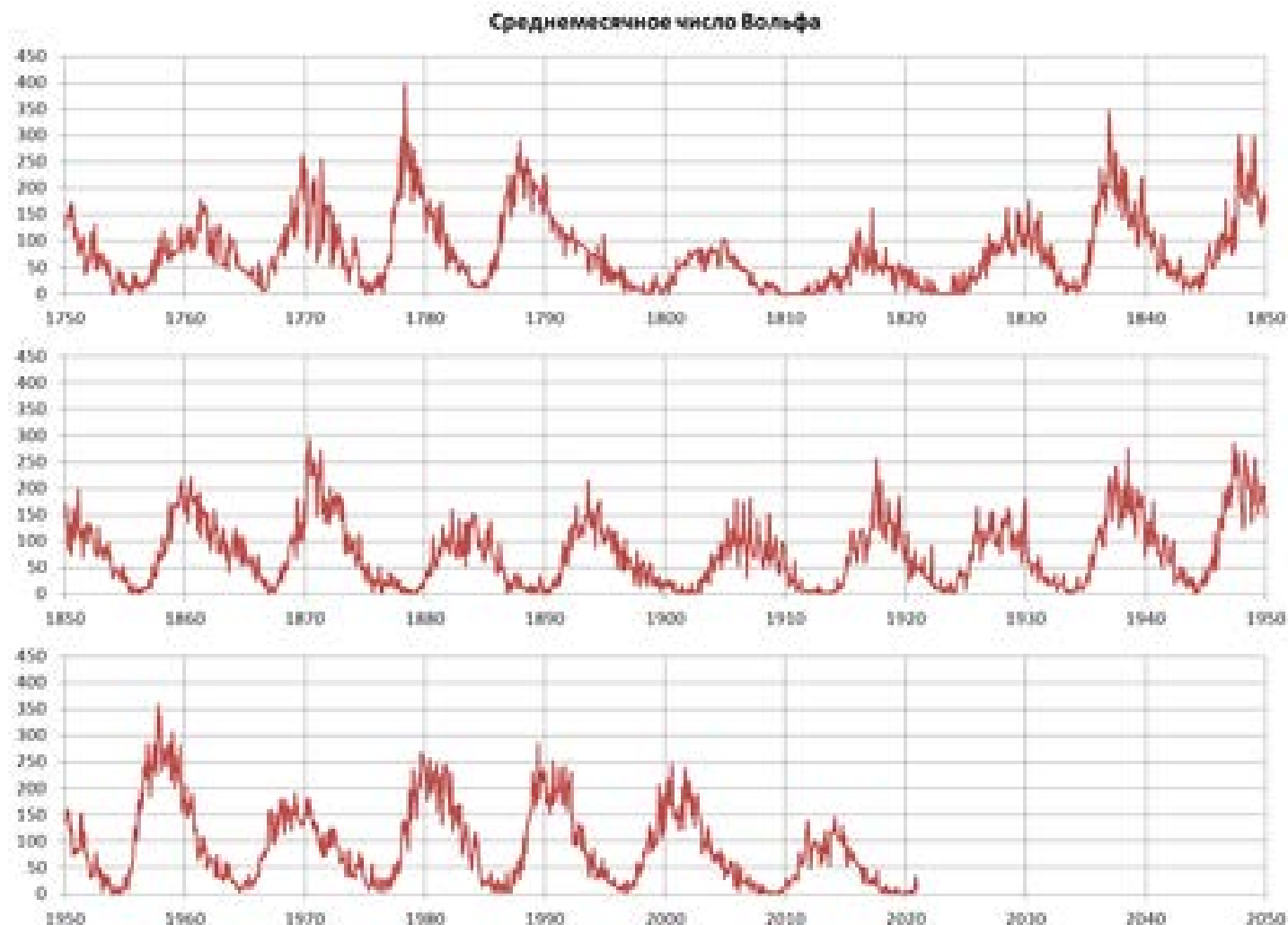


Хронология эпизодов Эль-Ниньо с 1900 по 2023 год.

Эль-Ниньо – подъем вод у берегов Перу, который приводит к длительному повышению температуры экваториальной части Тихого океана. Выявлена статистическая связь с температурными аномалиями в экваториальном поясе атмосферы Земли.



Вряд ли влияют пятна на Солнце:



Число Вульфа (Цюрихское число)  $W = k(f + 10g)$ , где  $f$  – число пятен,  $g$  – число групп пятен,  $k$  – нормировочный коэффициент. Наблюдаем на графике 11-летний период.

Напомним, что греческое слово «климат» означает наклон. Имеются в виду наклон солнечных лучей, нагревающих воздух, к земной поверхности. Греки уже понимали связь между этим наклоном и температурой воздуха.

Такие модели, если они будут достаточно надежны и были бы в состоянии разделить вклад различных природных геофизических явлений в динамику атмосферы (и океана) и вклад жизнедеятельности человека, могли бы дать долгосрочные оценки последствий при различных сценариях антропогенного вмешательства в среду, окружающую человечество. Такие модели активно развиваются, но еще далеки от совершенства. Например, для таких моделей не произведено сравнение корреляционных функций прогностических полей с корреляционными функциями, оцененными по измерениям.

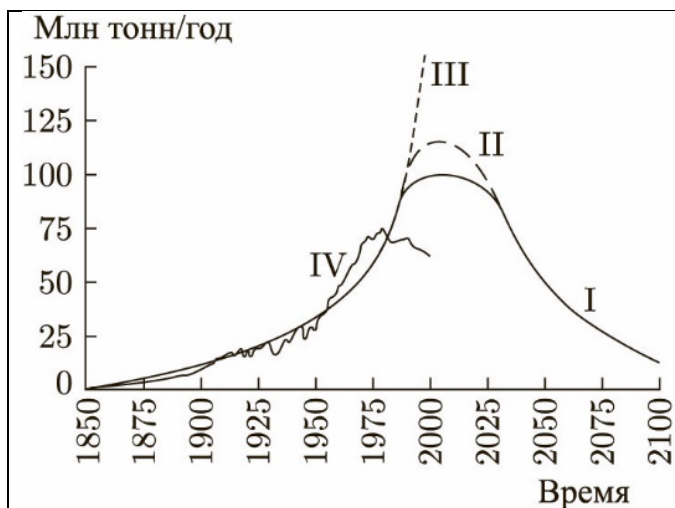


Рис.2. Мировой промышленный выброс  $SO_2$ . Кривые, I, II, III – выброс по оценкам трех разных авторов, приведены в статье Д.Миллера 1984. Докладчик привел эти графики в книге 1991г. К моменту расширенного переиздания книги в 2010г. появились новые фактические данные (в том числе и по прошедшему периоду - построена кривая IV, решительно отличающаяся от первых трех...

Модельные расчеты в будущем смогут давать более надежные прогнозы климатических изменений, но пока большой уверенности в этих оценках нет.

Существует целый ряд физических процессов, которые пока описываются приближенно: так, чтобы результирующие поля метеоэлементов были похожи на правду. Это называется «параметризация». Но правдоподобие не гарантирует правильности...

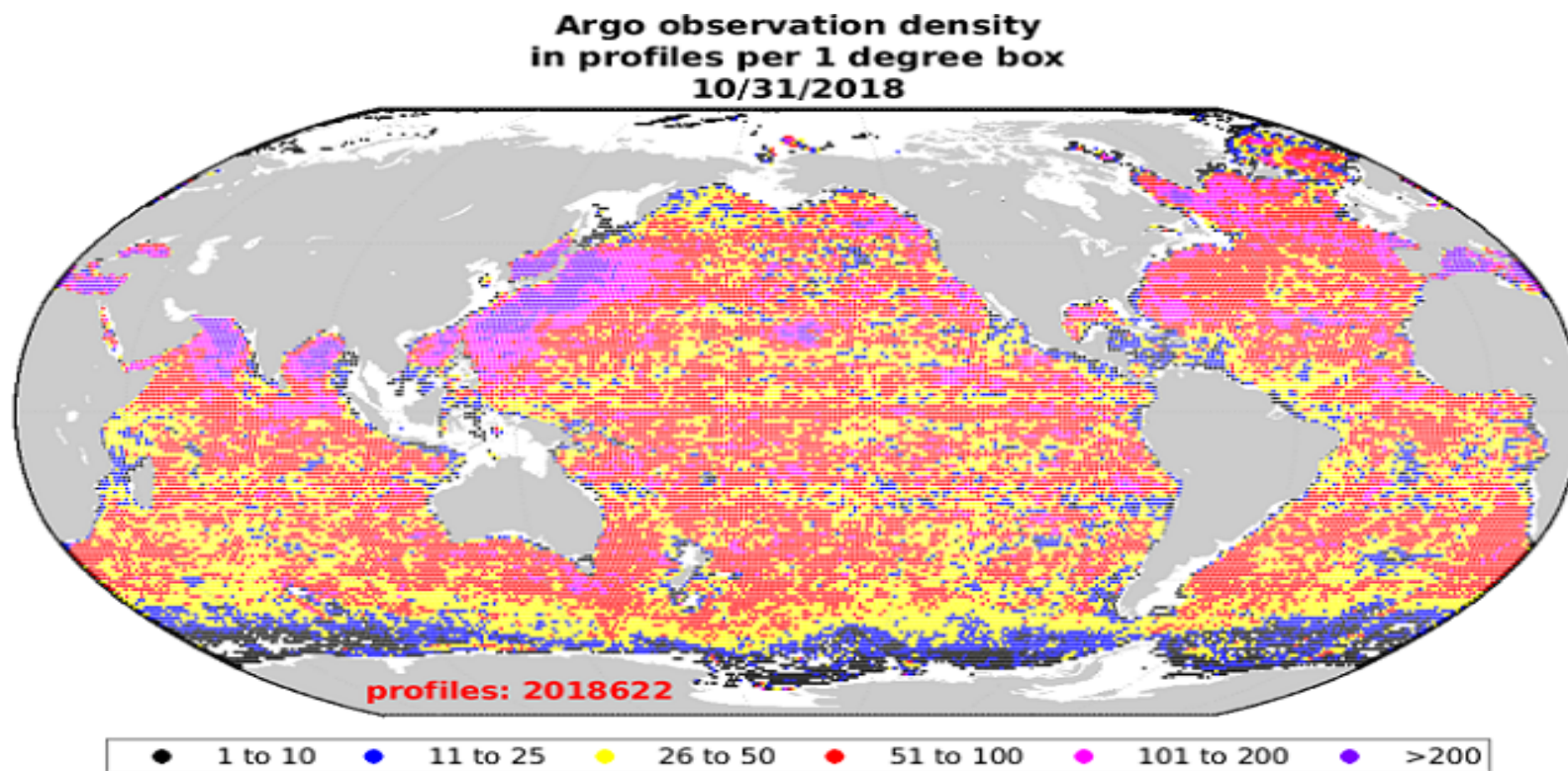
Поговорим о сравнительно краткосрочном прогнозе.

Левая граница дождя очерчена очень четко. Для оценки масштаба можно использовать шоссе. Граница дождя изогнута - это следствие геометрии воздушных потоков в зоне. Кроме того, они еще и по горизонтали закручены. Описать такие явления вокруг облака (с горизонтальным размером в несколько километров) в глобальной модели атмосферы Земли затруднительно

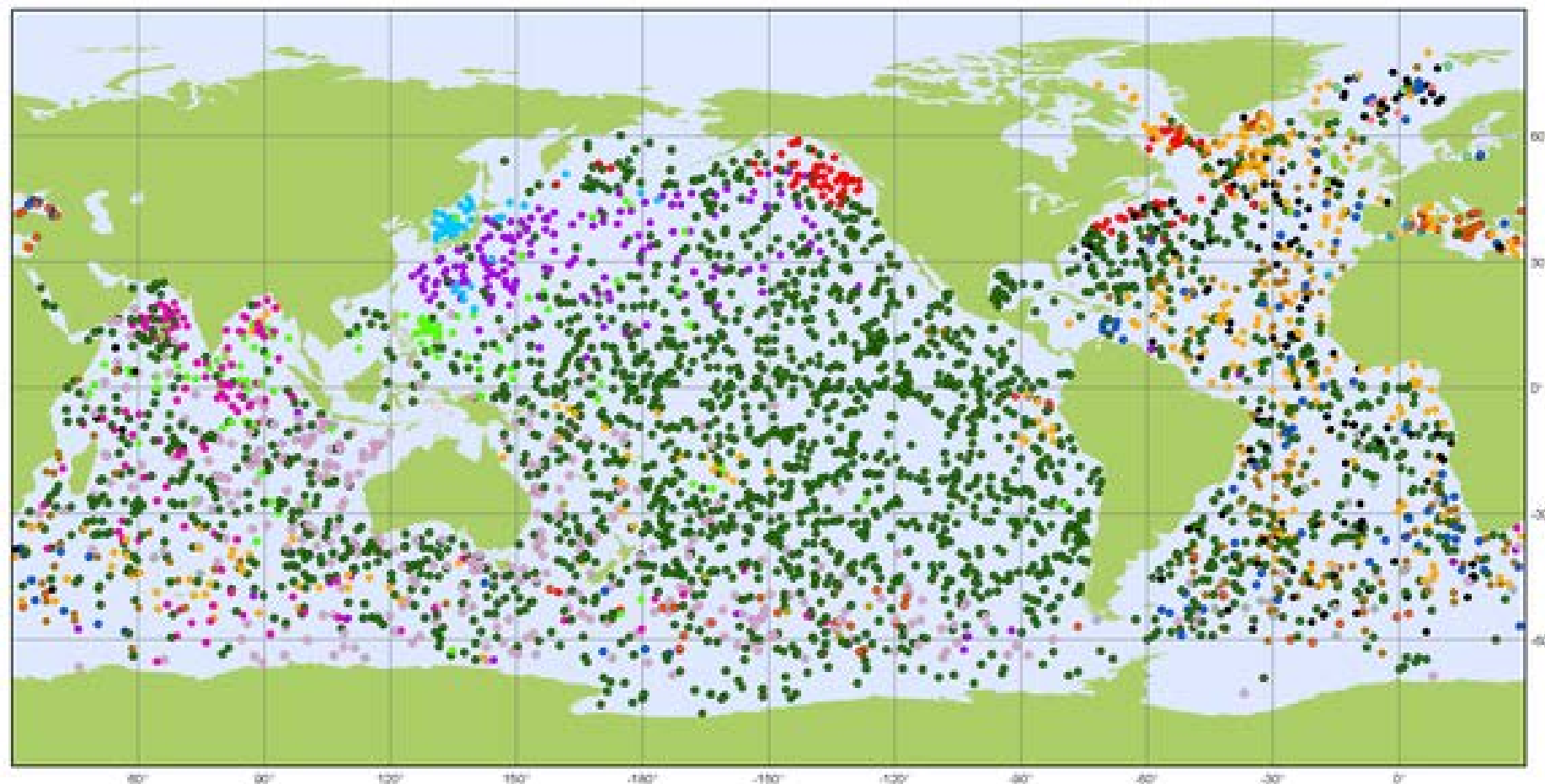


Для того чтобы давать прогноз погоды, нужны достаточно подробные и точные исходные данные, отвечающие данному моменту времени. А лучше еще и предыдущим моментам. После этого численно решается нелинейная система дифференциальных уравнения в частных производных (уравнения газовой динамики с многочисленными добавлениями).

На границе вычислительной области нужны граничные условия для прогнозируемых полей: температуры, давления влажности, ветра (а неплохо бы и концентрации разных примесей). Нижняя граница – суша или море. Их параметры (температура, влажность, волнение моря) тоже зависят от времени.



Важную роль в мониторинге океана играют буи «АРГО». Сейчас их около 4000. Дрейфуют на глубинах 1,5 - 2 км. Всплывают 1 раз в несколько дней. При всплытии зондируют параметры столба воды с высоким разрешением и передают на спутник.



Argo

### National contributions - 3881 Operational Floats

February 2018

Latest location of operational floats (data distributed within the last 30 days)

• ARGENTINA (1)	• EUROPE (94)	• INDIA (124)	• KENYA (1)	• PERU (3)	• USA (2179)
• AUSTRALIA (361)	• FINLAND (3)	• INDONESIA (1)	• MEXICO (2)	• POLAND (5)	
• BRAZIL (3)	• FRANCE (277)	• IRELAND (12)	• NETHERLANDS (24)	• KOREA, REPUBLIC OF (53)	
• CANADA (87)	• GERMANY (142)	• ITALY (65)	• NEW ZEALAND (8)	• SPAIN (5)	
• CHINA (105)	• GREECE (2)	• JAPAN (156)	• NORWAY (7)	• UK (163)	



Generated by [www.pommaps.org](http://www.pommaps.org), 02/03/2018



Верхняя граница прогнозируемой атмосферы – фиктивная. Просто выше нет измерений. Это источник ошибок прогноза. Смягчает ситуацию малость суммарной массы атмосферы на этих высотах.

Если прогнозируем не на глобусе, а на его части, то также нужны граничные условия на краю этого региона.

Поплавки Argo оснащены датчиками для измерения вертикальных профилей температуры и солености океана. На современные модели ставят дополнительные датчики, например, для измерения концентраций растворенного кислорода и представляющих биологический и химический интерес веществ, таких как хлорофилл, питательных веществ и pH.



Также существует сеть заякоренных (и поэтому неподвижных) измерительных морских буев. Одна из проблем – вандализм:

<https://www.wmo.int/pages/prog/amp/mmop/JCOMM/OPA/DBCP/vandalism/vandalism-ru.pdf>

Аналогичная проблема для автоматических и гидрологических наземных станций. Увы!

Получение информации о метеорологических, агрометеорологических и океанологических полях – лишь первый этап в задаче прогноза погоды. Затем нужно использовать знание законов их эволюции. Многие из этих законов записаны в виде дифференциальных уравнений.

Если рассматривать полет камня в поле силы тяжести, то нужно использовать систему дифференциальных уравнений для эволюции трех координат ( $x, y, z$ ) и трех компонент скорости  $\langle u, v, w \rangle$ . Это второй закон Ньютона.

Если же рассматривать полет валенка, то нужно учесть также и вращательные степени свободы – получится система уже не 6-го, а 12-го порядка.

Для описания эволюции метеорологического поля в произвольной точке атмосферы необходимо знать значения этого и других полей не только в этой, но и в соседних точках.

В таких моделях число степеней свободы бесконечно. Их невозможно реализовать на компьютерах.

В численных моделях число степеней свободы конечно, но очень велико. Многие миллионы.

Первую численную модель прогноза погоды разработал век назад шотландский математик Л.Ричардсон. Работал штат вычислителей с логарифмическими линейками. Расчеты одного прогноза по Европе на 6 часов велись несколько лет и дали ужасающий результат. Но в этом направлении началась работа.

### **Следствия.**

А. Нельзя дать прогноз погоды на несколько суток без знания текущей погоды на глобусе. В крайнем случае, - на полушарии. Нужно развивать мировую наблюдательную сеть.

Б. Необходимо изучать уравнения в частных производных и численные методы их решения на компьютерах. Компьютеры нужны самые мощные.

В. Нужно продолжать изучение сложных физических процессов. Например, взаимодействие частичек пара, воды и льда, а также микрочастиц в облаках, взаимодействие атмосферы с подстилающей поверхностью (испарение растений, поднятие пыли и брызг и т.п.).

<b>Каковы сейчас источники метеорологической информации</b>	<b>Количество</b>
осадков за весну измеряли левиты в Храме в Иерушалаиме. Если суммарный уровень осадков превышал 7 ладоней (около 56 см), то ожидали хороший урожай летом.	

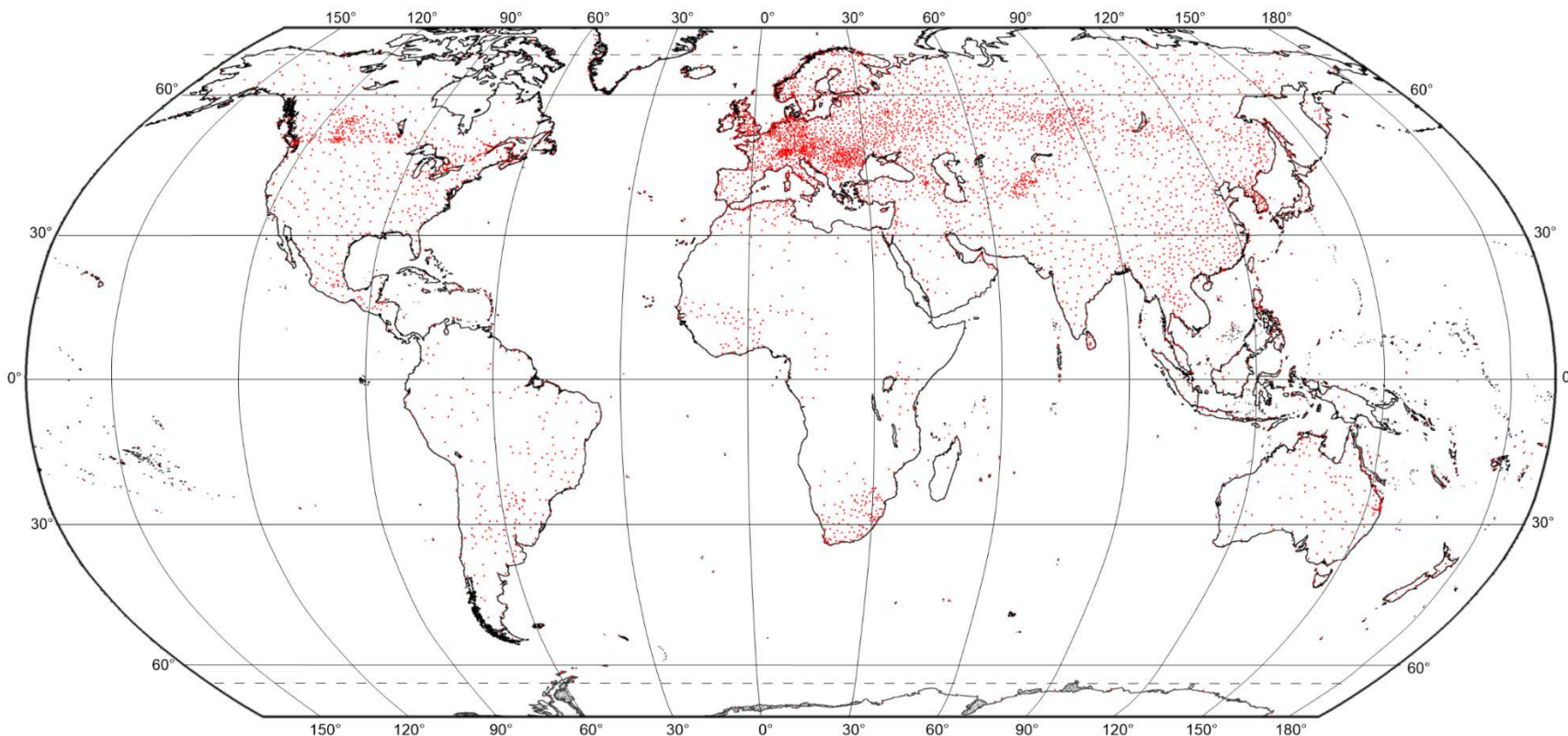
В Египте измеряли подъем уровня Нила. Причины его подъема были загадочны. Две с половиной тысячи лет назад Геродот сообщил в своей «Истории» несколько версий – уже тогда они были старинными.

В 1597г. Г.Галилей изготовил термоскоп: стеклянный шар с водой и погруженная в него трубка. Уровень воды описывал температуру (лат. temperature – надлежащее смещение, нормальное состояние; темперамент – однокоренное слово). Позднее Сагредо, ученик Галилея, нанес на трубку деления – измерения получили количественный характер.

Честь изобретения барометра в 1643 году принадлежит ученику Галилея – Э.Торричелли (и, возможно, их ученику В.Вивiani).

Регулярные метеонаблюдения начали проводить во Флорентийском герцогстве.

Наблюдения за температурой, давлением, влажностью, ветром, количеством осадков, облачностью, видимостью вблизи поверхности Земли осуществляют синоптические станции. Могут измеряться и автоматическими станциями. В зимний период некоторые автоматические станции не дают количество осадков. В переводе с греческого *συνοπτικός* означает ``способный видеть все'', однако, радиозонды, радары и спутники много добавляют к этому ``все''. Времена меняются, и технологии меняются вместе с ними...



### Расположение синоптических станций на планете

Станции и прогностические центры обмениваются метеорологической информацией. Когда-то ее доставляли на лошадях. Потом появились телеграф, радио и интернет. После WW-II оперативным перераспределением метеоинформации (важна скорость передачи) занимается WMO – Всемирная метеорологическая организация – агентство ООН.



Организатор и первый руководитель Единой гидрометеорологической службы СССР А.Ф.Вангенгейм был в 1934г. сослан в Соловки, а в 1937г. расстрелян. Реабилитирован в 1956г. Вообще, повышенный интерес российских правоохранительных органов к метеорологии имеет давнюю традицию. Первые метеонаблюдения (но не измерения) стали записывать по приказу Алексея Михайловича в 1650г. Поручено было Приказу Тайных Дел.

Сейчас метеостанций на планете примерно 10 000, в России примерно 1000. Измерения проводят каждые 3 часа. Автоматические чаще. Осадки измеряются реже. Причем в ЕТР и АТР – в разное время.

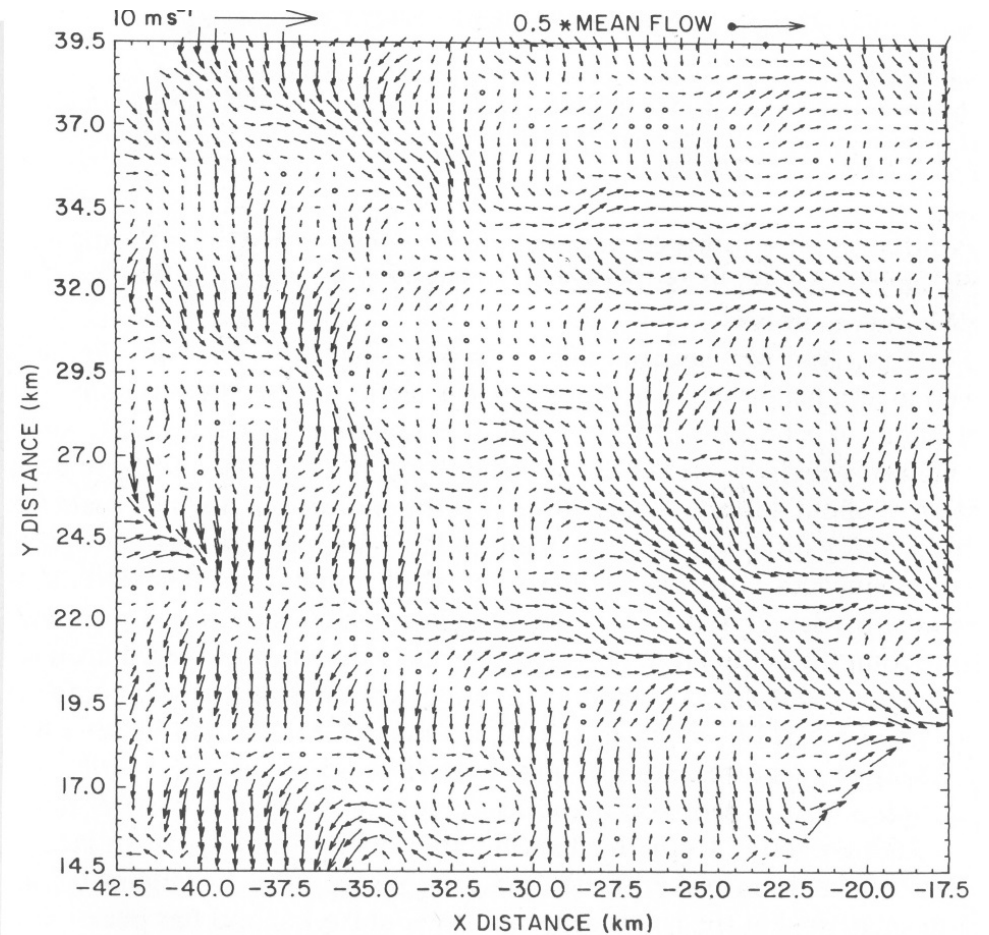
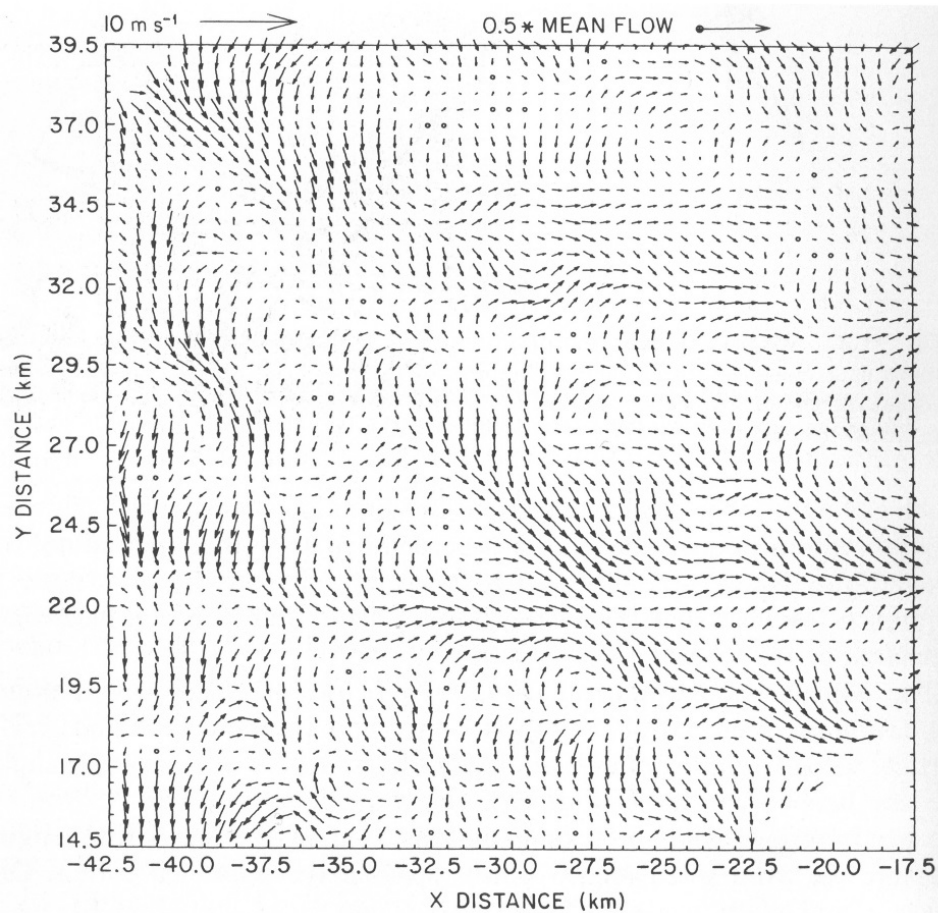
Примерное поступление метеорологических сообщений (тыс) с поверхности Земли за срок 12 часов по Гринвичу

	Станции на суше	Судовые наблюдения	Морские буи	Всего
Сев. полушарие	6,4	0,68	1,1	8,18
Южн. полушарие	1,1	0,07	0,7	1,87
Всего	7,5	0,75	1,8	10,05

Много это или мало? Оценим площадь поверхности нашей планеты Земля. Ее радиус 6 400 км. Формула для площади поверхности сферы  $4\pi R^2 \approx 5,2 \cdot 10^8 \text{ км}^2$ . Значит, на одну синоптическую станцию приходится в среднем  $5,2 \cdot 10^4 \text{ км}^2$ . В Северном полушарии станции примерно в 4 раза гуще, чем в Южном. Т.е. примерно квадрат со стороной 200 км. Аэрологических станций – тех, где запускают радиозонд, намного меньше. В Северном полушарии их примерно 650. Т.е. одна такая станция на  $4 \cdot 10^5 \text{ км}^2$ . Т.е. квадрат со стороной 600 км. Как от Санкт-Петербурга до Москвы. А как изменяется погода?

Измеряется влажность почвы раз в 10 дней. На станциях, где вокруг есть агробизнес. Зимой также измеряют глубину промерзания почвы.

Можно попытаться разделить средний ветер и ветер локальный. На левом квадрате 25 х 25 км с разрешением 0,5 км приведено поле отклонения ветра от среднего по тому же квадрату на высоте 1 км (где уже на ветер слабо влияют особенности земной орографии, дома и т. п.). Измерения проводились совместно двумя радарными в Оклахоме в 14 ч 38 мин С.С.Т. 27 июля 1977г.



Вектор среднего потока приведен в верхнем правом углу и составляет 14,8 м/с. Видно, что эти отклонения меньше среднего потока на порядок (но не более!). И у них есть своя повторяющаяся структура - вихри с характерным размером 4 км.

На правом рисунке измерения ветра, проведенные при тех же условиях, что и на левом, но спустя примерно 3,5 мин. Средний ветер практически не изменился, а мелкомасштабная структура отклонений от него изменилась. Основное изменение (хотя не все сводится к нему) - перенос вдоль основного потока в восточном направлении. Можно оценить, за какое время вся картинка ``уйдет" из рассматриваемого квадрата:  $25 \text{ км} / (14,8 \text{ м/с}) \approx 28 \text{ мин}$  - для посадки или взлета самолета вполне достаточно.

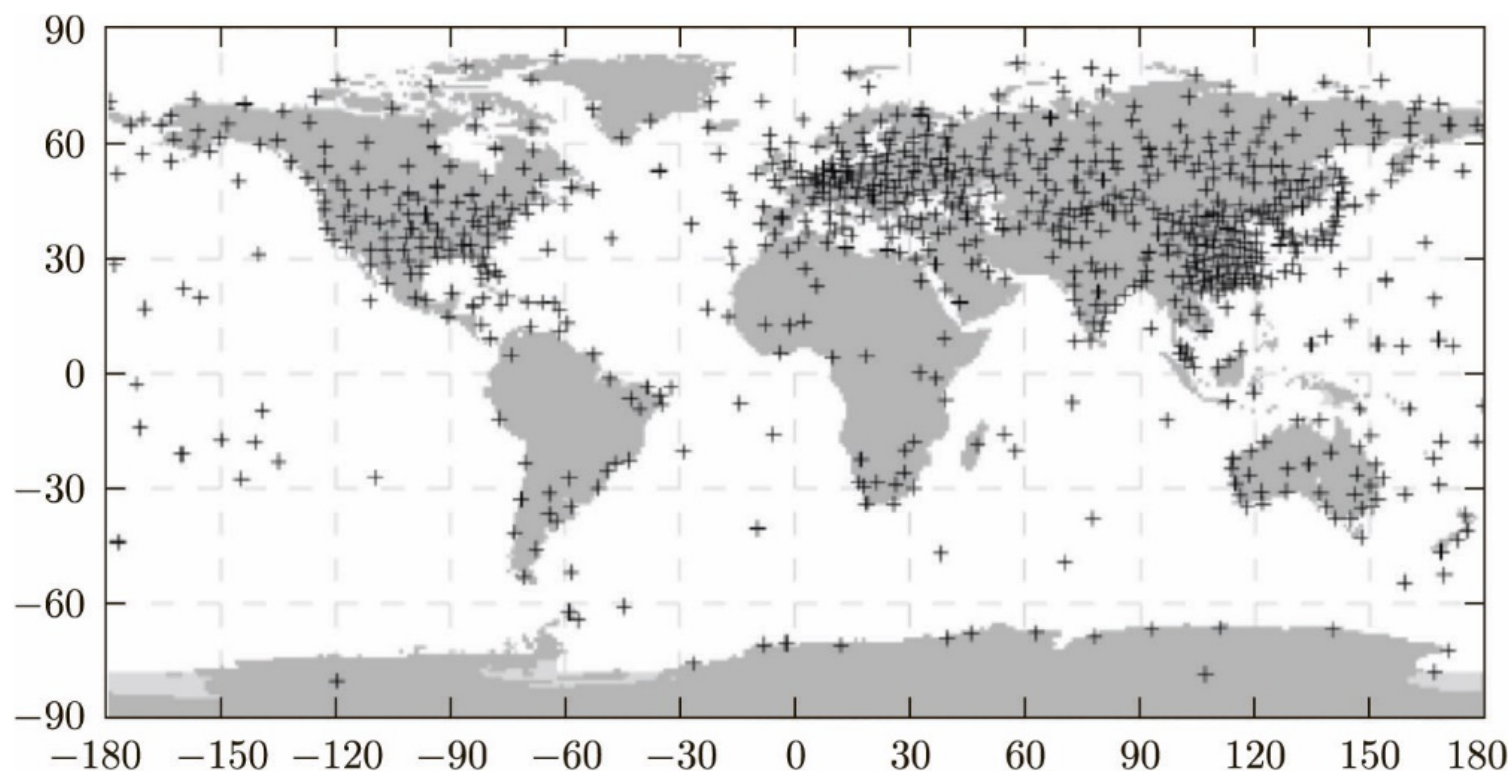
Основной «перенос погоды» происходит не у поверхности Земли, а выше. И там необходимо производить измерения



Запуск радиозондов (первый успешный запуск радиозонда конструкции П.А.Молчанова, январь 1930). Это большой воздушный шар, к которому прикреплены приборы и радиопередатчик. Высота подъема сейчас примерно 30 -35 км. Время подъема 1,5 – 2 часа. Частота измерений сейчас 1- 2 сек.

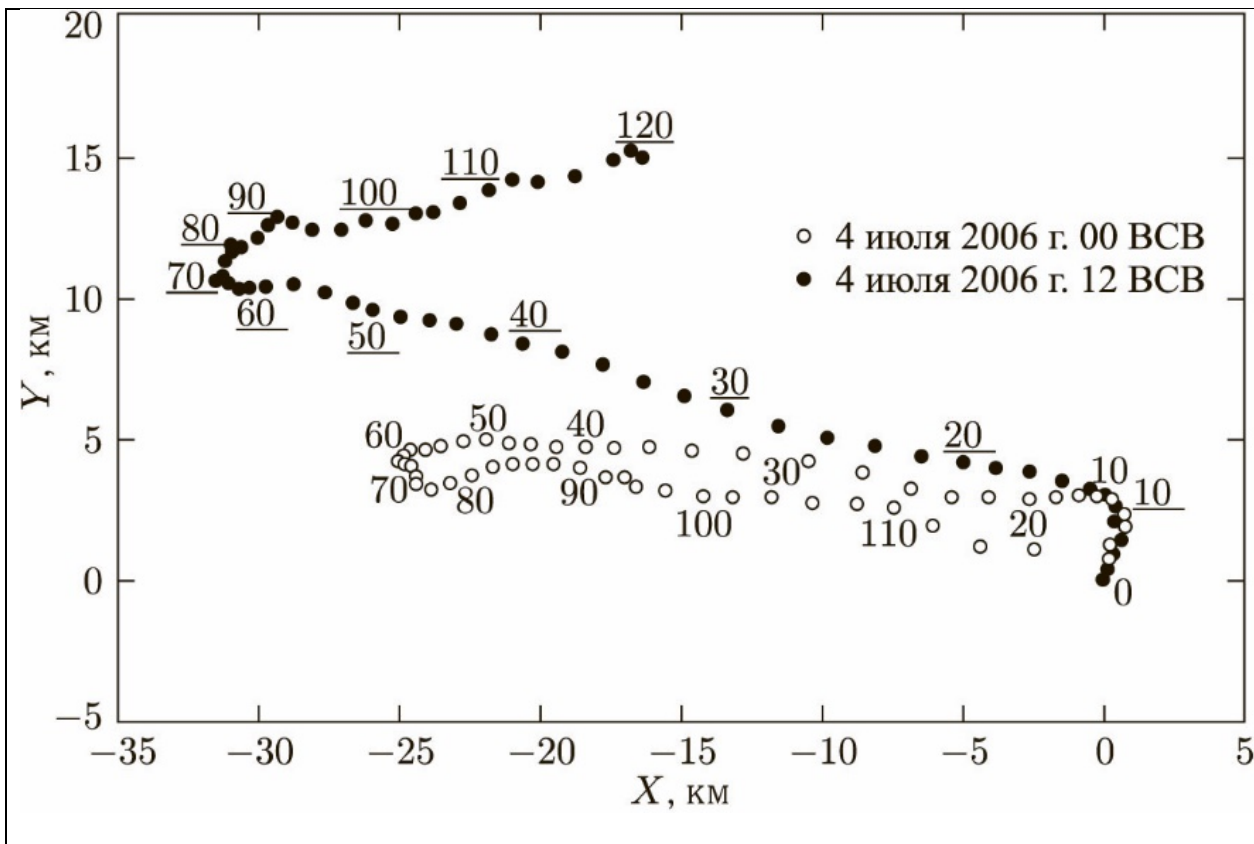
Сейчас лучшими считаются приборы фирмы “Vaisala”.





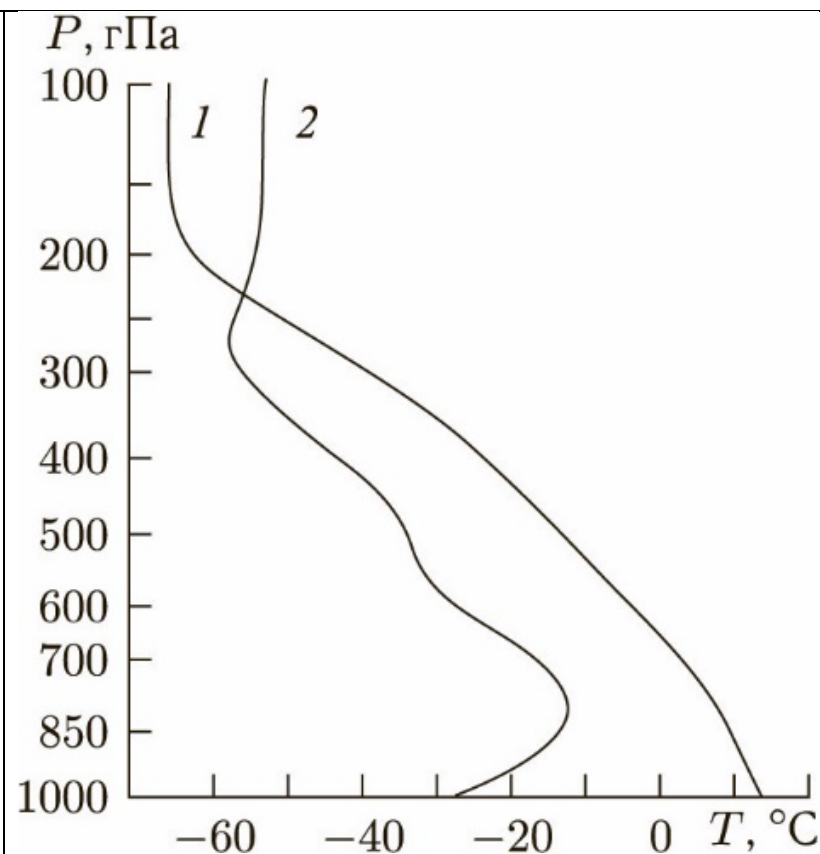
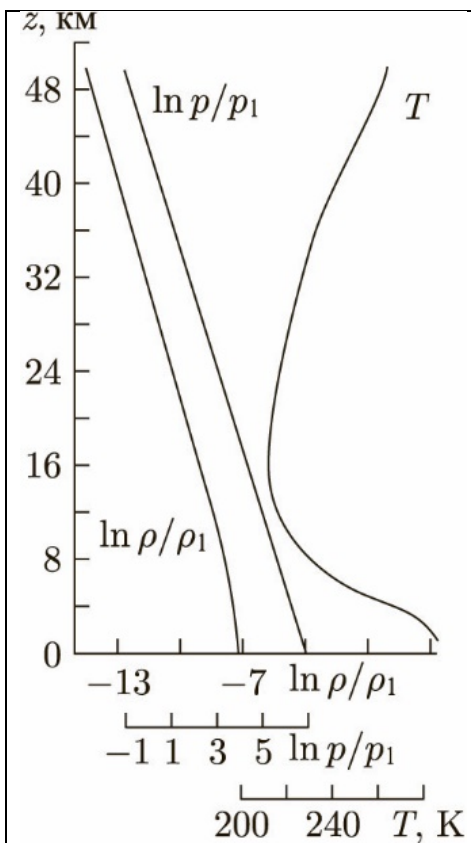
Распределение аэрологических станций на поверхности Земли

Информация о метеополях в тропосфере и нижней стратосфере, получаемая с радиозондов, считается самой точной. По этой карте можно судить, где вносят больший вклад в благосостояние человечества, а где меньший.



Запуски зондов в одной точке с разницей в 12 часов по Гринвичу (направления осей - долгота и широта), а числа означают минуты полета. Смещение зондов по мере их подъема составляет десятки километров. Видно, что ветер за эти 12 часов заметно поменялся.

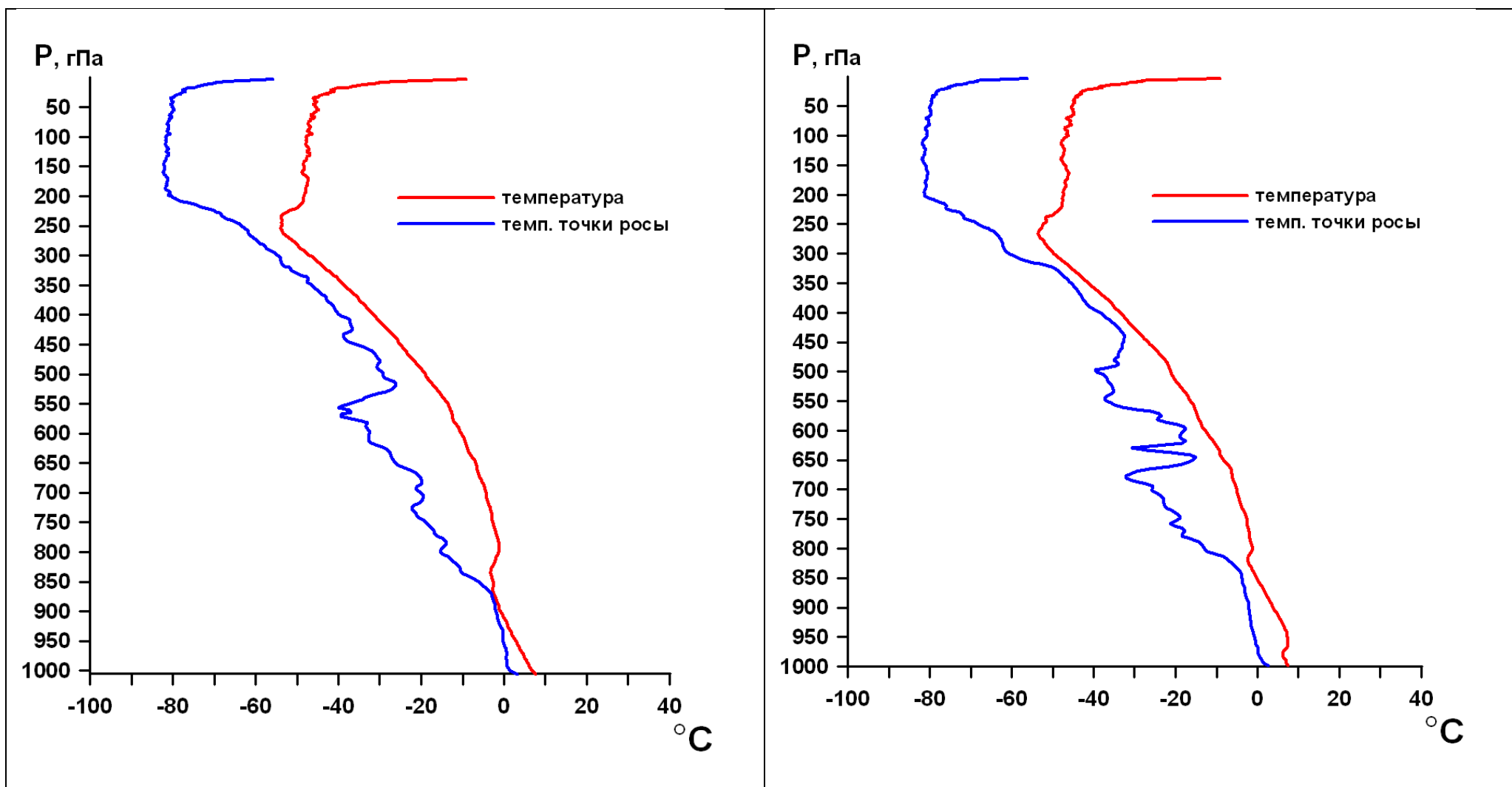
Данные о профилях температуры и точки росы, получаемые с зондов, за последние десятилетия стали заметно подробнее. Примерно в 100 раз.



Средние профили температуры, плотности, давления. Здесь  $\rho_1 = 1 \text{ г см}^{-3}$ ,  $p_1 = 1 \text{ гПа}$

Зондирование: 12.00 по Гринвичу 2.11.1977г. 1 -  $48,8^{\circ} \text{ N}, 2^{\circ} \text{ E}$ ; 2 -  $74,7^{\circ} \text{ N}, 95^{\circ} \text{ W}$ . Температурные профили построены по данным о высотах барических поверхностей как производные кубических сплайнов по переменной  $\xi = -(R_{y\theta} / g) \ln p$ .

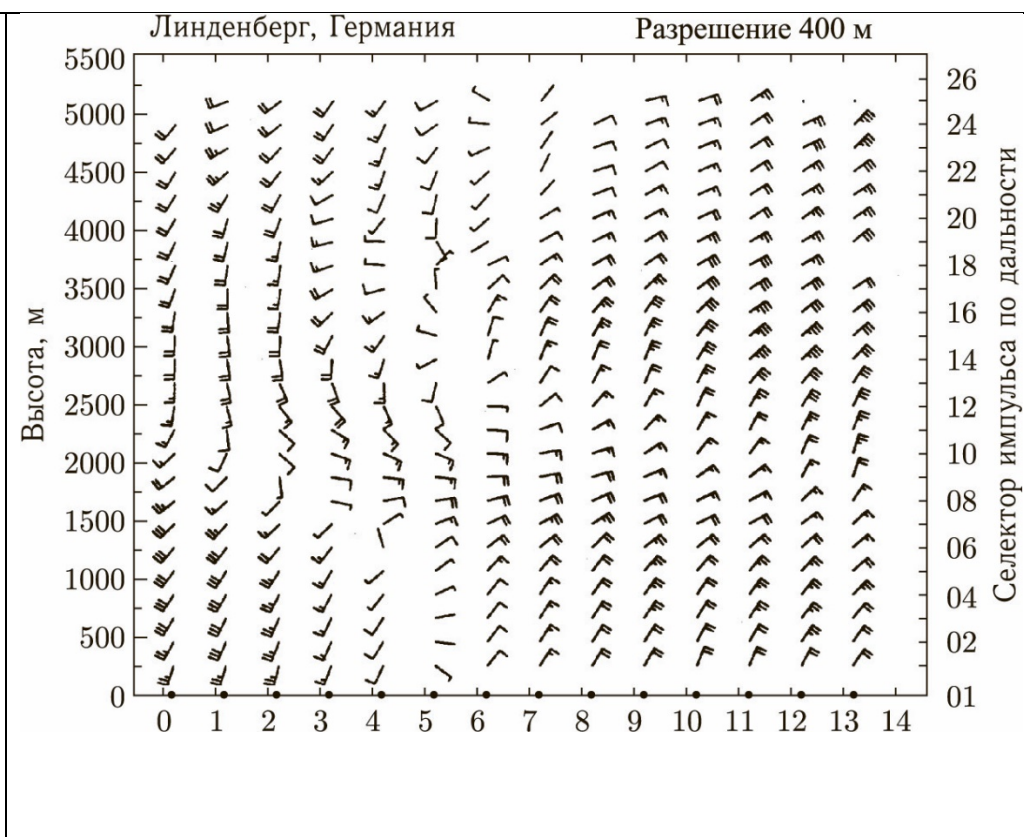
Техника радиозондирования атмосферы постепенно совершенствуется.



4 июля 2006г. 00 и 12 по Гринвичу. Температура и температуры точки росы.

В восьмидесятых годах появилась технология, обеспечивающая сообщения, насчитывающие уже не десятки, а тысячи вертикальных уровней, и их начинают использовать в некоторых метеоцентрах. Верхний уровень зондирования для таких зондов уже не 10 гПа, а 3,5 гПа. В последние несколько лет разрешение еще улучшилось. Рекорды – до 5000 уровней. Лучшее вертикальное разрешение для температуры и влажности позволяет, например, оценивать границы облачности по вертикали.

Изменение профайлером горизонтального ветра с высотой и временем при прохождении фронта. По оси абсцисс - время в часах, по оси ординат - высота, на которой производится измерение. Направление стрелки указывает направление ветра. Если она направлена вверх, то ветер южный, а направо - западный. Оперение стрелки описывает силу ветра. Длинное ``перо" отвечает 5 м/с, а короткое - вдвое меньше



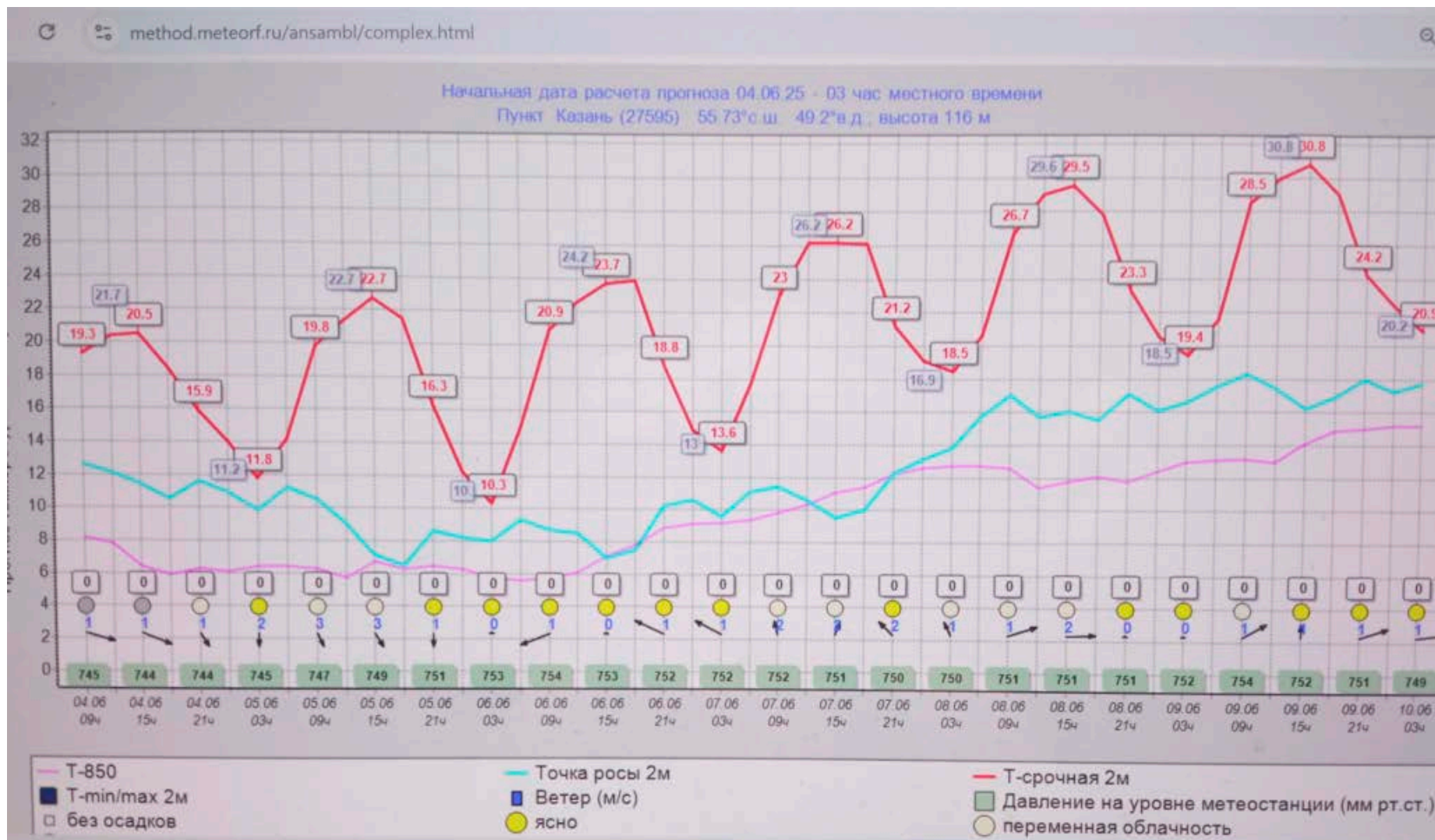


## Измерения со спутников

Первый спутник Земли был запущен в 1957г. Метеорологи почти сразу после запуска первых спутников заинтересовались возможностью наблюдать за атмосферой Земли из космоса. В США уже в апреле 1960 года был запущен аппарат «ТИРОС-1», передавший первое в мире изображение Земли из космоса, и тем самым доказавший пригодность спутников для наблюдения за погодой. Советские метеоспутники начали запускать в 1967г.

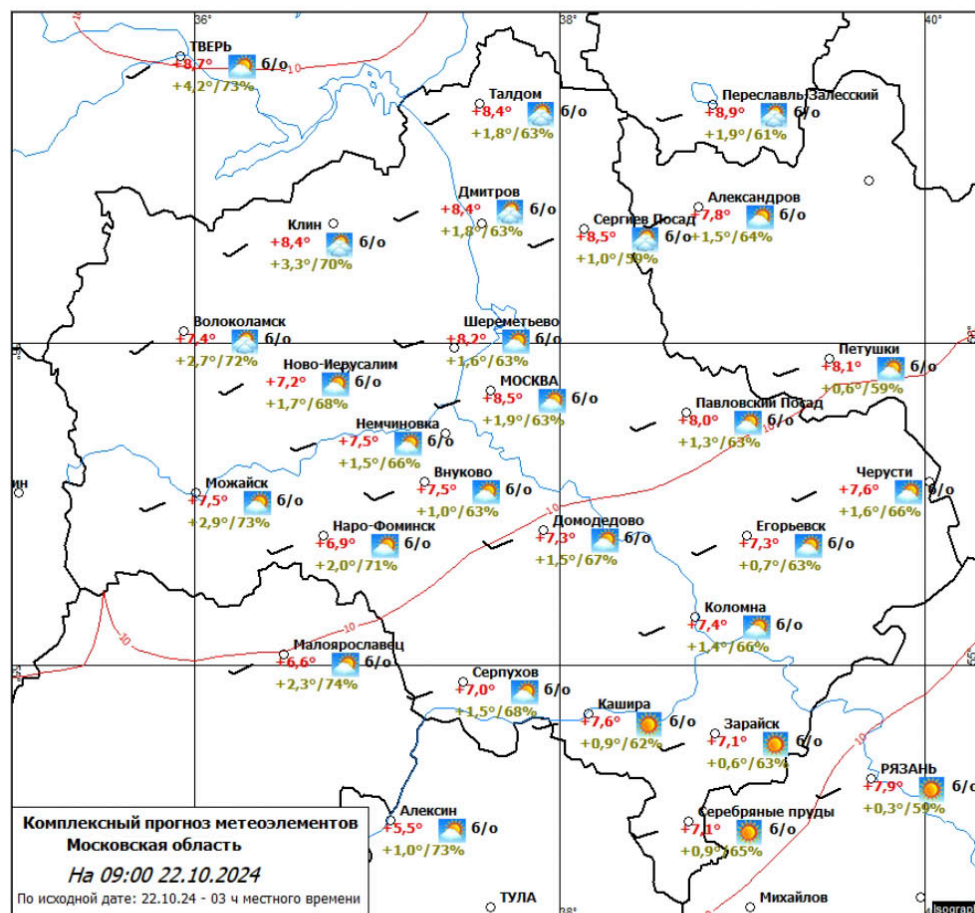
Сейчас активно работают группировки метеоспутников США, Европы и Китая. Производятся измерения температуры, давления, влажности, скорости ветра на разных высотах, температура поверхности почвы или океана, влажности почвы, ледовая обстановка, прозрачность атмосферы, концентрация озона и многие другие характеристики. Дискретность информации связана с периодом между пролетами спутника над регионом, широтой полосы обзора, количеством однородных спутников. Точность спутниковой информации уступает точности измерений «контактных» (например, с метеозонда), но многократно превосходит их по количеству информации.

Комплексный прогноз погоды с заблаговременностью шесть суток дважды в сутки выкладывается на сайт методического кабинета Гидрометцентра РФ <https://method.meteorf.ru/ansambl/complex.html>



## Карты комплексного прогноза по Центральному федеральному округу

Регион Московская область  
Заблаговременность 06 ч



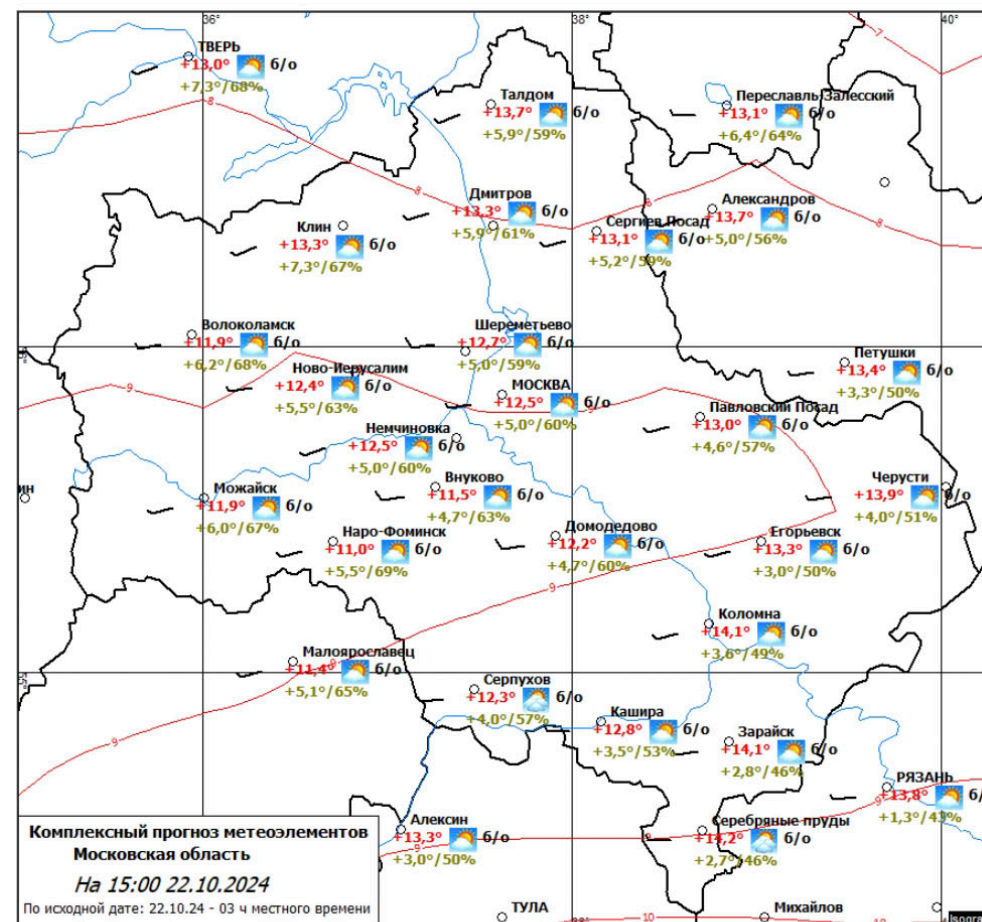
Условные обозначения порывов ветра:  $\geq 12$  м/с;  $\geq 15$  м/с;  $\geq 18$  м/с;  $\geq 21$  м/с;  $\geq 25$  м/с

Комментарий к карте:

- На картах дается прогноз «срочной» температуры воздуха (°C), которая соответствует сроку синоптических наблюдений, но при прогнозе на 24, 48, 72, 96 ч и 12, 36, 60, 84 ч на картах даются прогностические значения минимальной и максимальной температуры воздуха соответственно.
- Ниже температуры представлены два значения: точка росы (°C) и относительная влажность (%).
- Справа от облачности представлен прогноз осадков (мм/бч).
- Фаза осадков выделена цветом: зеленый (дождь), серый (дождь со снегом), голубой (снег).
- На карте также представлены изотермы прогноза температуры на уровне 850 гПа (красный цвет).

## Карты комплексного прогноза по Центральному федеральному округу

Регион Московская область  
Заблаговременность 12 ч



Условные обозначения порывов ветра:  $\geq 12$  м/с;  $\geq 15$  м/с;  $\geq 18$  м/с;  $\geq 21$  м/с;  $\geq 25$  м/с

Комментарий к карте:

- На картах дается прогноз «срочной» температуры воздуха (°C), которая соответствует сроку синоптических наблюдений, но при прогнозе на 24, 48, 72, 96 ч и 12, 36, 60, 84 ч на картах даются прогностические значения минимальной и максимальной температуры воздуха соответственно.
- Ниже температуры представлены два значения: точка росы (°C) и относительная влажность (%).
- Справа от облачности представлен прогноз осадков (мм/бч).
- Фаза осадков выделена цветом: зеленый (дождь), серый (дождь со снегом), голубой (снег).
- На карте также представлены изотермы прогноза температуры на уровне 850 гПа (красный цвет).



Результаты этих прогнозов оперативно передаются региональным синоптикам.

Имеются прогнозы по отдельным пунктам, карты метеополей по каждому субъекту РФ, есть ветки на республику Беларусь и государства Центральной Азии. Есть ветка на оценки ошибок прогнозов по каждому пункту за последнее время.

### **Основные блоки прогноза погоды**

Анализ и усвоение данных наблюдений. Происходит обмен данными наземных и аэрологических наблюдений, спутниковых и самолетных наблюдений.

Простейшая цель: подготовить начальные данные для решения смешанной краевой задачи для уравнений газовой динамики со значительными добавками. При таком подходе утрачивается большой массив наблюдений, произведенных не в стандартные сроки (00 и 12 по Гринвичу), а в промежуточные сроки. Поэтому происходит «непрерывное усвоение» одновременно с некоторым прогнозом со стартом за некоторое время до настоящего старта. Данные наблюдений нужно переинтерполировать из точек наблюдений в регулярную сетку. В целом речь идет об интерполяции в  $\mathbb{R}^4$  с существенно нерегулярной сети точек. При этом уже используется прогностическая модель.

## Уравнения динамики свободной атмосферы в сферической системе координат

$$\partial_t \rho + r^{-2} \partial_r (\rho r^2 w) + (r \sin \vartheta)^{-1} [\partial_\vartheta (\rho v \sin \vartheta) + \partial_\lambda (\rho u)] = 0,$$

$$\partial_t w + w \partial_r w + r^{-1} v \partial_\vartheta w + (r \sin \vartheta)^{-1} u \partial_\lambda w - r^{-1} (u^2 + v^2) = -2\omega u \sin \vartheta - g R_{\text{земли}}^2 r^{-2} + r \omega^2 \sin^2 \vartheta - \rho^{-1} \partial_r p,$$

$$\partial_t v + w \partial_r v + r^{-1} v \partial_\vartheta v + (r \sin \vartheta)^{-1} u \partial_\lambda v + r^{-1} (wv - u^2 \cot \vartheta) = -2\omega u \cos \vartheta + r \omega^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - (r \rho)^{-1} \partial_\vartheta p,$$

$$\partial_t u + w \partial_r u + r^{-1} v \partial_\vartheta u + (r \sin \vartheta)^{-1} u \partial_\lambda u + r^{-1} (wu + v \cot \vartheta) = 2\omega w \sin \vartheta + 2\omega v \cos \vartheta - (r \rho \sin \vartheta)^{-1} \partial_\lambda p,$$

$$\partial_t p + \kappa \left\{ r^{-2} \partial_r (p^{1/\kappa} r^2 w) + (r \sin \vartheta)^{-1} [\partial_\vartheta (p^{1/\kappa} v \sin \vartheta) + \partial_\lambda (p^{1/\kappa} u)] \right\} p^{1-1/\kappa} = 0,$$

где  $\vartheta$  - коширота (0 на Северном полюсе и  $\pi$  - на Южном),  $\lambda$  - долгота,  $r$  - расстояние от центра Земли,  $g$  - ускорение свободного падения на поверхности Земли,  $v$ ,  $u$ ,  $w$  - соответствующие компоненты скорости,  $\rho$  - плотность воздуха,  $p$  - давление,  $\omega$  - частота вращения Земли ( $7,29 \cdot 10^{-5}$  рад/с),  $\kappa$  - показатель (индекс) адиабаты (для воздуха примерно 1,4).

Здесь пренебрегли (а в реальных моделях учитываем): приток тепла от Солнца и поверхности Земли, присутствие воды в разных фазах и фазовые ее переходы, выпадение осадков, наличие примесей и неоднородность хим. состава воздуха. Электромагнитные силы влияют на высотах, начиная с многих десятков километров. Описание турбулентности воздуха – особенно важно в

пограничном слое атмосферы. Ничего не сказано пока о граничных условиях (на границе с поверхностью планеты и на границе с космосом).

## Первые интегралы для модели свободной атмосферы

Степени 0 (интегранды не содержат производных)

**Энергия**  $E = \int_G \rho \left[ \frac{|\vec{u}|^2}{2} + \frac{p}{\rho(\kappa-1)} - \frac{R_{\text{земли}}^2 g}{r} - \frac{\omega^2 r^2 \sin^2 \vartheta}{2} \right] d^3x$

**Момент импульса относительно оси вращения Земли**  $M_z = \int_G \rho r (u - \omega r \sin \vartheta) \sin \vartheta d^3x$

**Энтропийная серия**  $K_f = \int_G \rho f(\rho p^{-1/\kappa}) d^3x$ , где  $f$  – произвольная гладкая функция 1 переменного,  $G$

– дополнение к шару в  $\mathbb{R}^3$ . Это полный список интегралов степени 0.

Если дополнительно предположить, что выполняется уравнение гидростатики  $\partial_r p = -g \rho R_{\text{земли}}^2 / r^2$ , то сохраняется еще один функционал

$$P_z = \int_G \rho (v \sin \vartheta - w \cos \vartheta) d^3x,$$

а функционалы

$$P_1 = \int_G \rho[(v \cos \vartheta - w \sin \vartheta) \sin \lambda - u \cos \lambda] d^3x, \quad P_2 = \int_G \rho[(v \cos \vartheta - w \sin \vartheta) \cos \lambda + u \sin \lambda] d^3x$$

осциллируют в противофазе с частотой  $2\omega$ .

**Интегралы Эртеля (степени 1):**  $E_\Phi = \int_G \rho \Phi(\rho p^{-1/\kappa}, \varsigma) d^3x$ ,  $\varsigma = \rho^{-1}(\text{grad } S, \vec{\alpha})$ ,  $\vec{\alpha} = \text{rot } \vec{u} + 2\vec{\Omega}$ ,  $S$  – энтропия,  $\vec{\alpha}$  – абсолютный вихрь,  $\varsigma$  – потенциальный вихрь. Можно и следующие «эртели» построить.

**Уравнение гидростатики и закон Архимеда.** В уравнении для вертикальной скорости

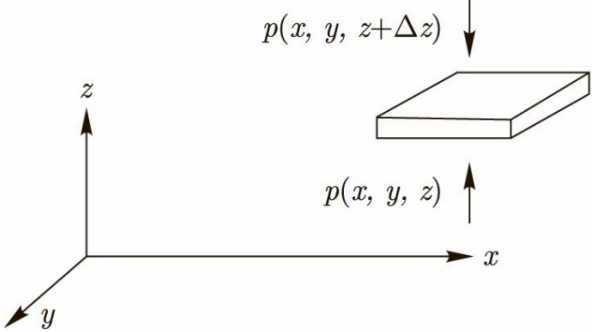
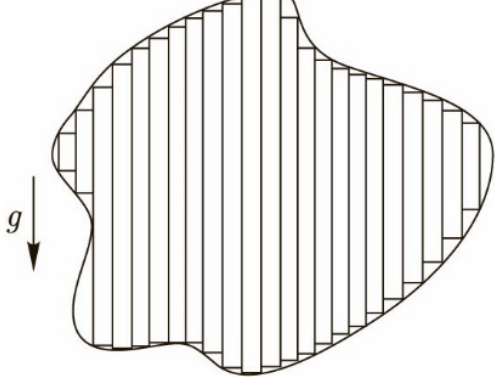
$$\partial_t w + w \partial_r w + r^{-1} v \partial_\vartheta w + (r \sin \vartheta)^{-1} u \partial_\lambda w - r^{-1} (u^2 + v^2) = -2\omega u \sin \vartheta - g R_{\text{земли}}^2 r^{-2} + r \omega^2 \sin^2 \vartheta - \rho^{-1} \partial_r p$$

оставим два главных слагаемых  $0 = -g R_{\text{земли}}^2 r^{-2} - \rho^{-1} \partial_r p$ . Порядок системы уравнений 5 понижается почти на 2. У системы было три группы волн: переноса, гравитационные и акустические. При упрощении акустические – самые быстрые – исчезают, но и гравитационные несколько искажаются – плата за упрощение.

Допустимость такого предположения существенно зависит от масштаба описываемых явлений и желаемой точности описания. Зато критерий устойчивости – ограничение шага разностной схемы по времени делается мягче.



В последние годы в ведущих метеоцентрах мира (с самыми мощными компьютерами) отказываются от гидростатики в моделях. Возникает много вопросов. Например, начальное условие для вертикальной скорости, которую не умеют хорошо измерять, и которая очень быстро меняется по всем переменным. Если пренебречь сферичностью Земли, то получим  $\partial_z p = -g\rho$ . Отсюда следует закон Архимеда

	<p>Разница давлений на поверхности тонкой пластинки толщиной <math>\Delta z</math> в силу уравнения гидростатики равна массе жидкости или газа, который мог бы содержаться в столбике такой высоты. Это означает выполнение закона Архимеда для пластинки.</p>
	<p>Тело произвольной формы может быть разбито на «кирпичики», для каждого из которых закон Архимеда выполняется.</p> <p>Уравнение гидростатики выполняется не всегда. Например, вихрь на улице поднимает пыль, а смерч может и крышу поднять. Самолеты летают, корабли на подводных крыльях.</p>

	Уравнение гидростатики означает монотонность уменьшения давления при росте $z$ , а значит, позволяет сделать замену переменной и в качестве вертикальной переменной использовать давление или его логарифм.
--	---

$$d_z p = -g\rho \Leftrightarrow d_p z = \frac{-1}{g\rho} = \frac{-RT}{gp} \Leftrightarrow p d_p z = d_{\ln p} z = \frac{-R}{g} T, \text{ константа } A = \frac{-R}{g} \approx -2,93. \text{ Здесь } T -$$

температура по Кельвину. Поэтому логарифм давления убывает с высотой почти линейно, а само давление – почти экспоненциально. Здесь использовано [уравнение Клапейрона](#).

Большинство радиозондов измеряет две из трех величин: давление, высота, температура. Но небольшое число зондов на планете измеряет все три. Есть шанс оценить отличия реальных данных от гидростатики.

[Геопотенциал](#) – высота барической поверхности (иногда, умноженная на  $g$ ).

Среднее давление на уровне моря = 1013 гектопаскалей. Тропосфера заканчивается примерно на 250. Зонд обычно долетает до 10.

Модели численного интегрирования непрерывно совершенствуются со времен Л.Ричардсона – более века. Довольно популярны так называемые полунеявные схемы.

Рассмотрим **уравнение Бюргерса**  $u_t + uu_x = Du_{xx}$ ;  $D = \text{const} > 0$ . Аппроксимируем слагаемое с вязкостью по схеме Кранка – Николсон, а нелинейное слагаемое, описывающее перенос, - по схеме leap-frog:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + \frac{(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2}{4h} = D \frac{[u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}] + [u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}]}{2h^2}. \quad (1)$$

Для реализации схемы на каждом шаге нужно обращать линейный разностный оператор  $C = E - \frac{D\tau}{h^2} [T_h - 2E + T_{-h}]$ , а это намного дешевле. Здесь  $T_h$  - оператор сдвига по  $x$  на шаг  $h$ . Обращение на каждом шаге по времени: FastFourier по долготе и прогонка по широте для каждой гармоники. Оператор  $C$  невырожденный, положительно определенный (легко проверить с помощью преобразования Фурье и теоремы Гершгорина).

Следующая стадия – постпроцессинг – объединение результатов нескольких моделей с целью улучшения качества. Используются статистики ошибок, допущенных в предыдущие сроки прогноза. Графики, показанные выше, получены именно в результате такого постпроцессинга.

Теперь от прогноза вернемся к задачам оценки динамики климата

### **Описание использованного климатического архива наблюдений и обозначения**

Синоптические станции производят измерения температуры у поверхности земли согласно утвержденному наставлению каждые три часа, т.е. 8 раз в сутки. Погрешность измерений не должна превосходить  $0,1^{\circ}\text{C}$ . Однако, на практике в этих данных могут присутствовать ошибки, которые, впрочем, довольно эффективно отбрасываются с помощью так называемого комплексного контроля. Конечно, при небольшой амплитуде ошибки такая процедура контроля бессильна. Тем не менее к полученному таким образом архиву можно относиться с большой уверенностью.

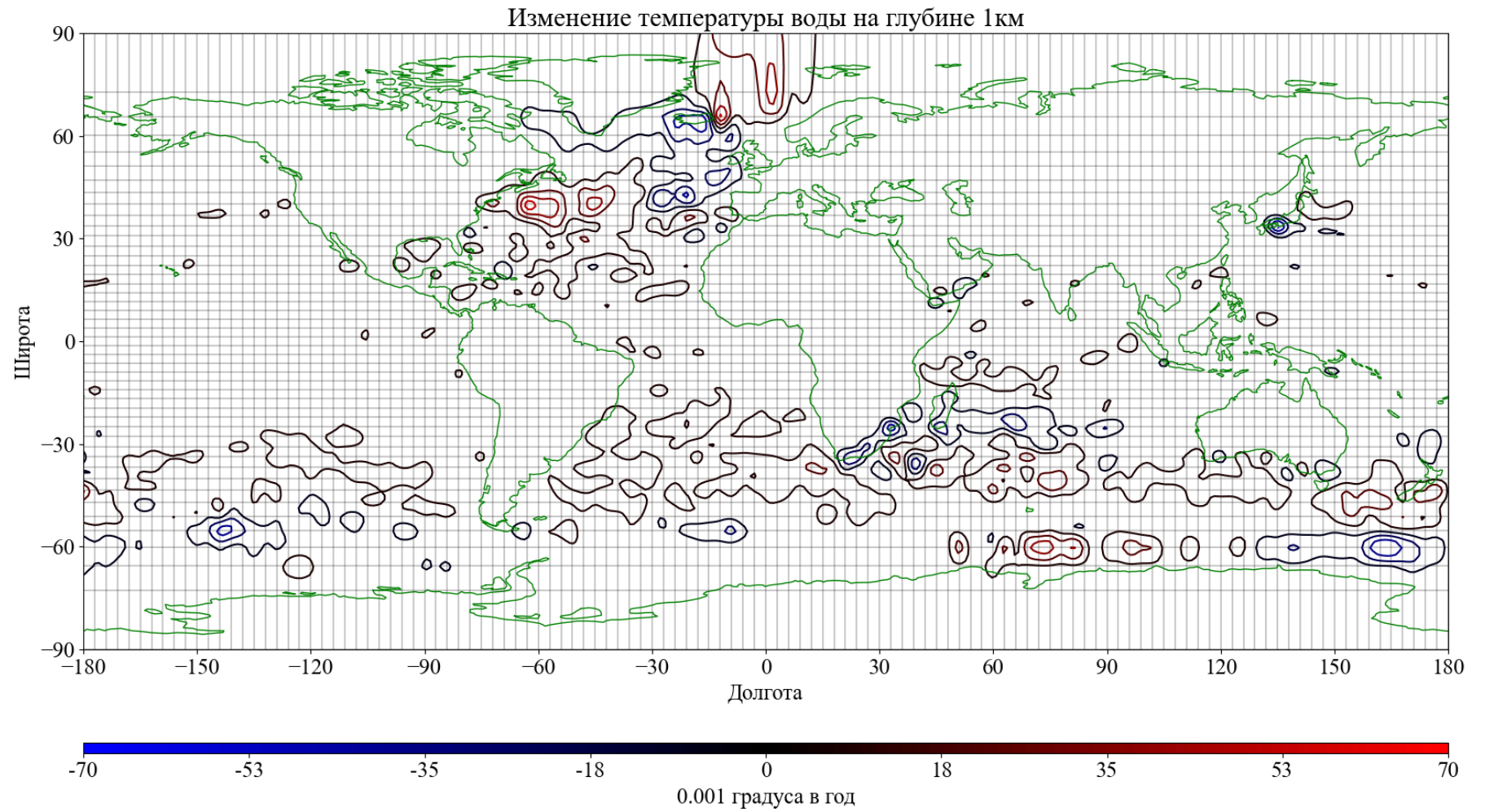
Кроме того, на синоптических станциях наблюдаются (и здесь анализируются) значения экстремальной температуры за сутки с номером  $k$ :  $t_{\min}(k)$ ,  $t_{\max}(k)$ .

Далее все значения  $f(j)$  измеренной функции  $f$  в момент времени  $j$  (это номер суток и номер срока, если  $f$  - срочная температура и номер суток в случае, когда  $f$  – одна из двух экстремальных температур) в архиве измерений будут снабжаться меткой  $A(j)$ , которая равна 0, если соответствующее число  $f(j)$  отсутствует или было отброшено программой контроля. В противном случае полагаем  $A(j)=1$ .

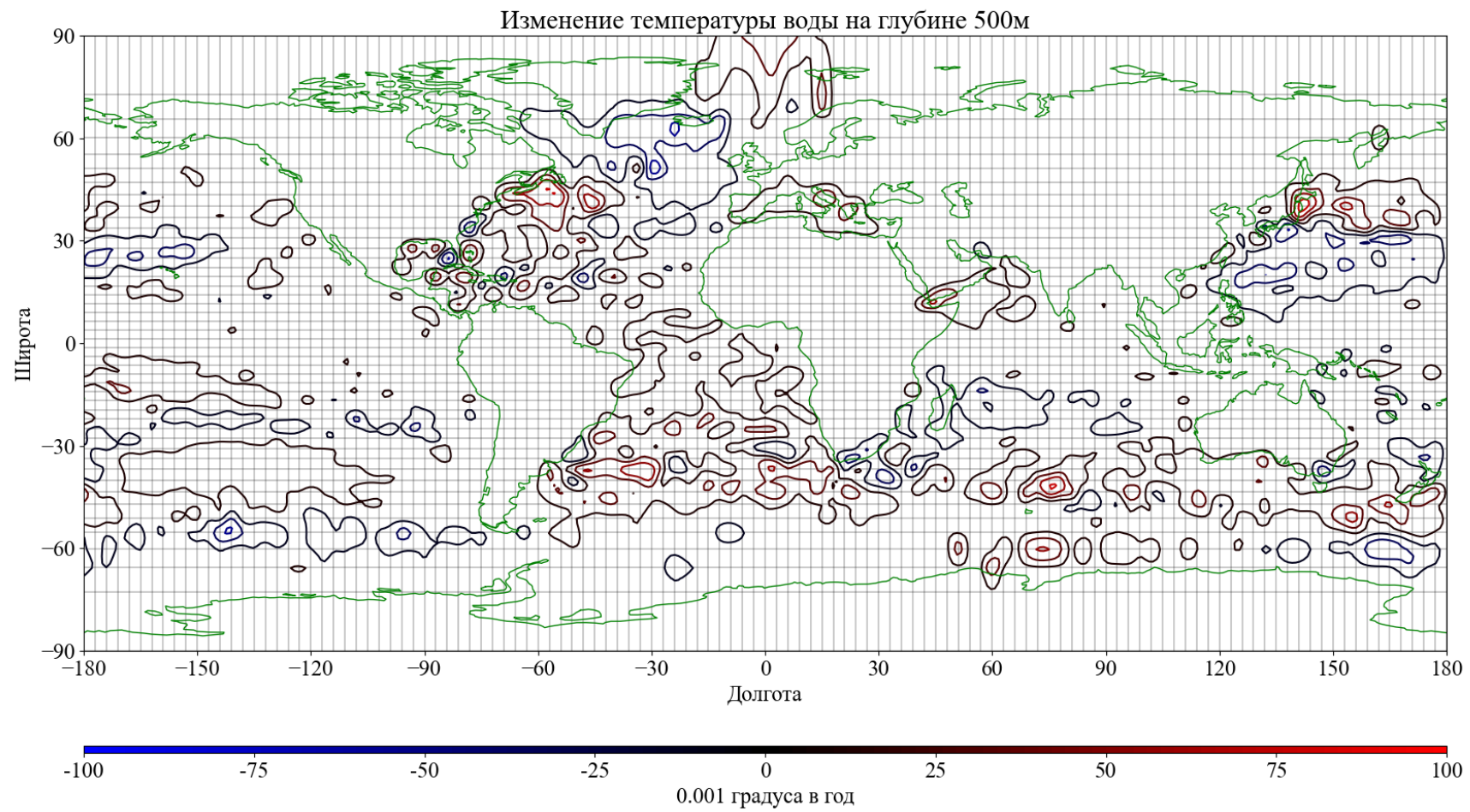
Дата последнего весеннего заморозка (т.е. последние сутки в интервале от 1 января до 30 июня, в которых наблюдалась  $t_{\min} < 0$ ) в году с номером  $m$  обозначается  $z_s(m)$ . Дата первого осеннего заморозка (т.е. первые сутки в интервале от 1 июля до 31 декабря, в которых наблюдалась  $t_{\min} < 0$ ) в году с номером  $m$  обозначается  $z_a(m)$ .

Анализировался архив измерений на синоптических станциях приземной температуры, накопленный и хранящийся в Гидрометцентре РФ, за 23 года (2001 – 2023гг).

Также использовался архив информации с дрейфующих буев ARGO. Наблюдаем локальные увеличения температуры в Северной Атлантике на глубине 1 км и более сильные и в разных регионах – на глубине 0,5 км.







## Математический аппарат

### Оценки для температуры воздуха

Оценим в каждом году помимо средней температуры первые гармоники Фурье для сезонных и суточных колебаний. Для этого введем базис из 5 почти ортогональных сеточных функций (если в измерениях не было бы пропусков, то эти функции оказались бы в точности ортогональны):

$$u_1 = 1, u_2 = \sin(2\pi k / 8), u_3 = \cos(2\pi k / 8), u_4 = \sin(2\pi k / 8N), u_5 = \cos(2\pi k / 8N).$$

Определим по данным измерений наилучшее приближение функции  $f(k)$ :  
$$f(k) \approx \sum_{j=1}^5 b_j u_j(k), \quad b_j = \text{const.}$$
 Для этого умножим это равенство по очереди скалярно на функцию  $u_i(k)$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

Составим матрицу  $Q$  (матрицу Грама) порядка 5 с элементами

$$q_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^{8N} A(k) u_i(k) u_j(k)}{\sum_{k=1}^{8N} A(k)}, \quad i, j = 1, \dots, 5,$$

и вектор  $\vec{Y}$  с компонентами  $y_i = \frac{\sum_{k=1}^{8N} A(k) u_i(k) f(k)}{\sum_{k=1}^{8N} A(k)}, \quad i = 1, \dots, 5.$

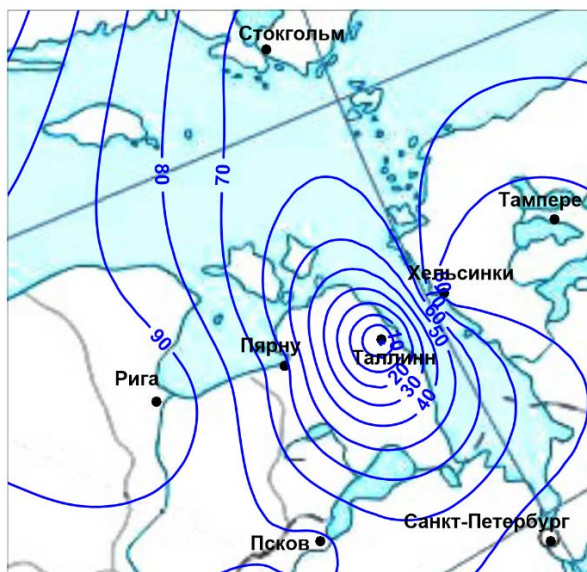
Коэффициенты наилучшего приближения  $\{b_j\}_{j=1}^5$  получаются решением системы линейных уравнений 5-го порядка:  $Q\vec{b} = \vec{Y}$ . Именно такие коэффициенты обеспечивают минимальное среднеквадратичное отклонение  $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{\text{всесроки}} \left[ f(k) - \sum_{j=1}^5 b_j u_j(k) \right]^2$ .

Повторим: эти вычисления выполнялись независимо для каждого года,  $m=1, \dots, 23$ .

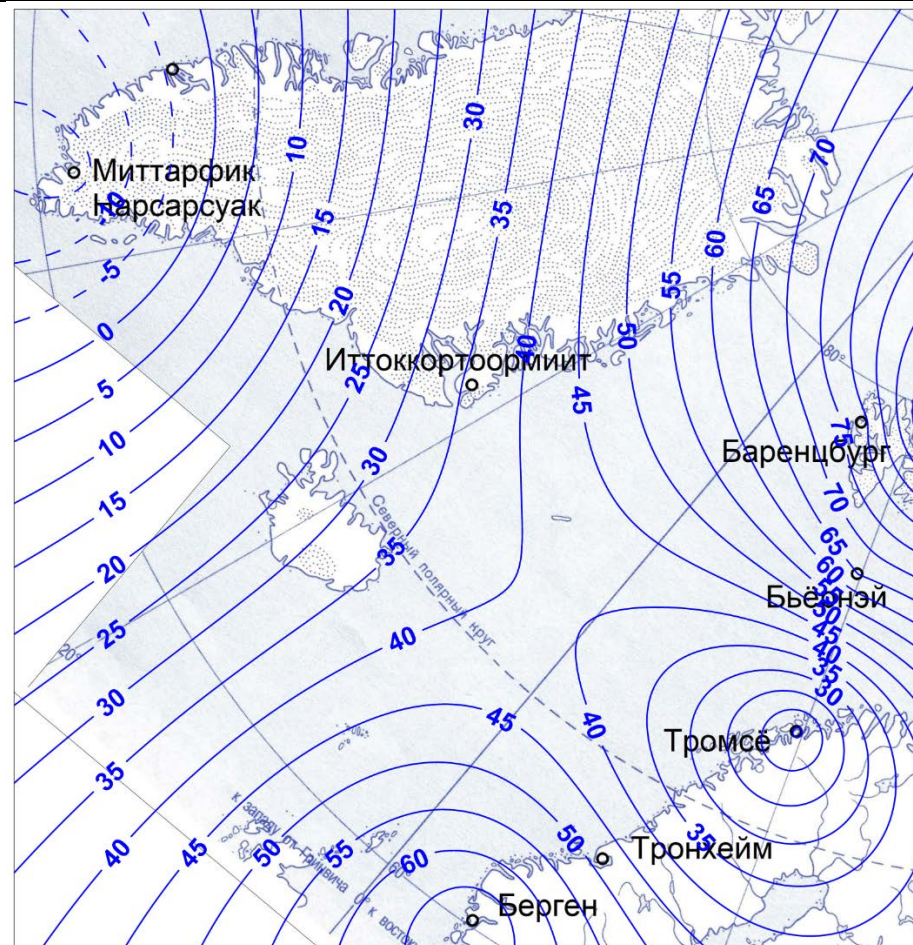
Рассмотрим сначала  $j=1$  - изменение среднегодовых температур.





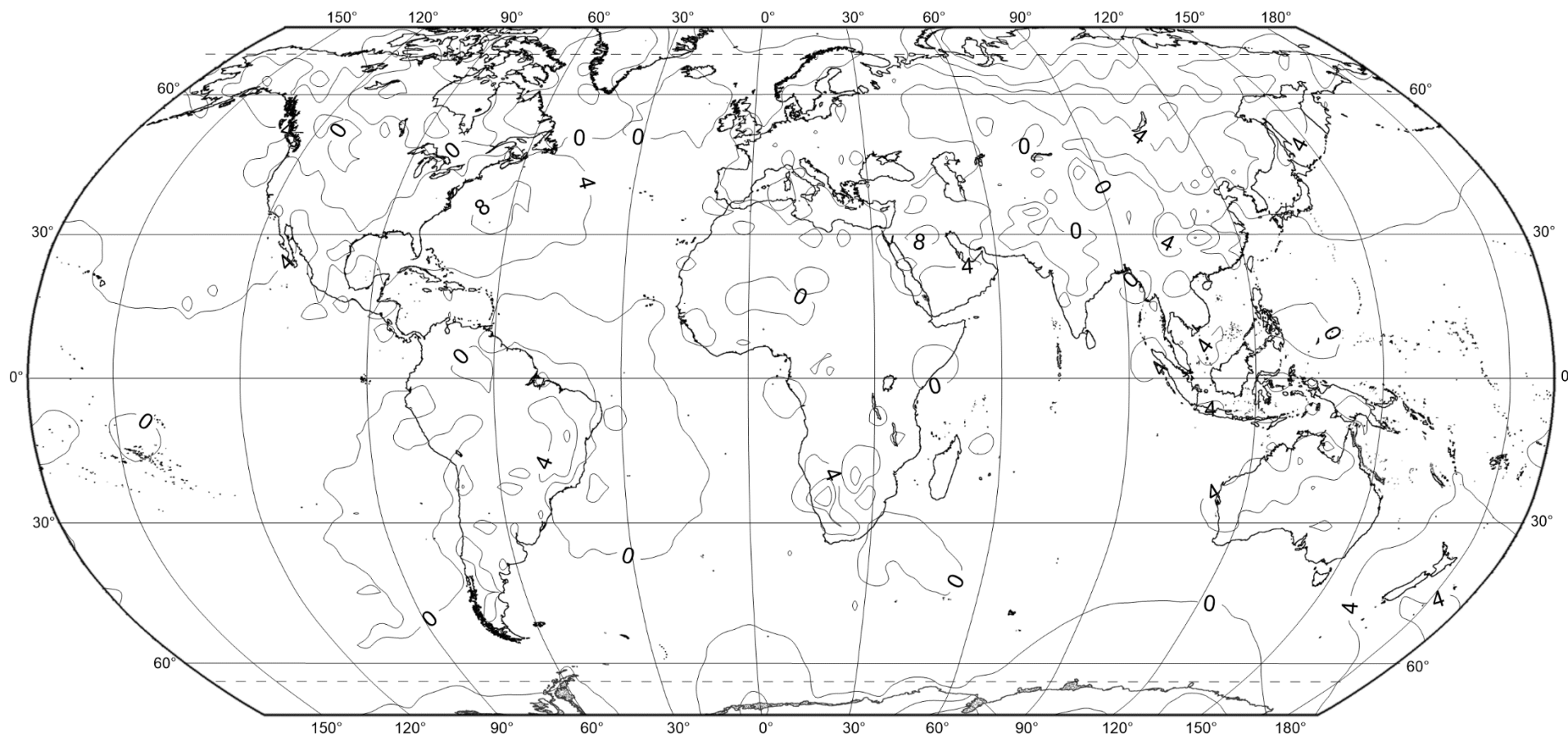


В районе Финского залива – сильное изменение между Таллинном и Хельсинки



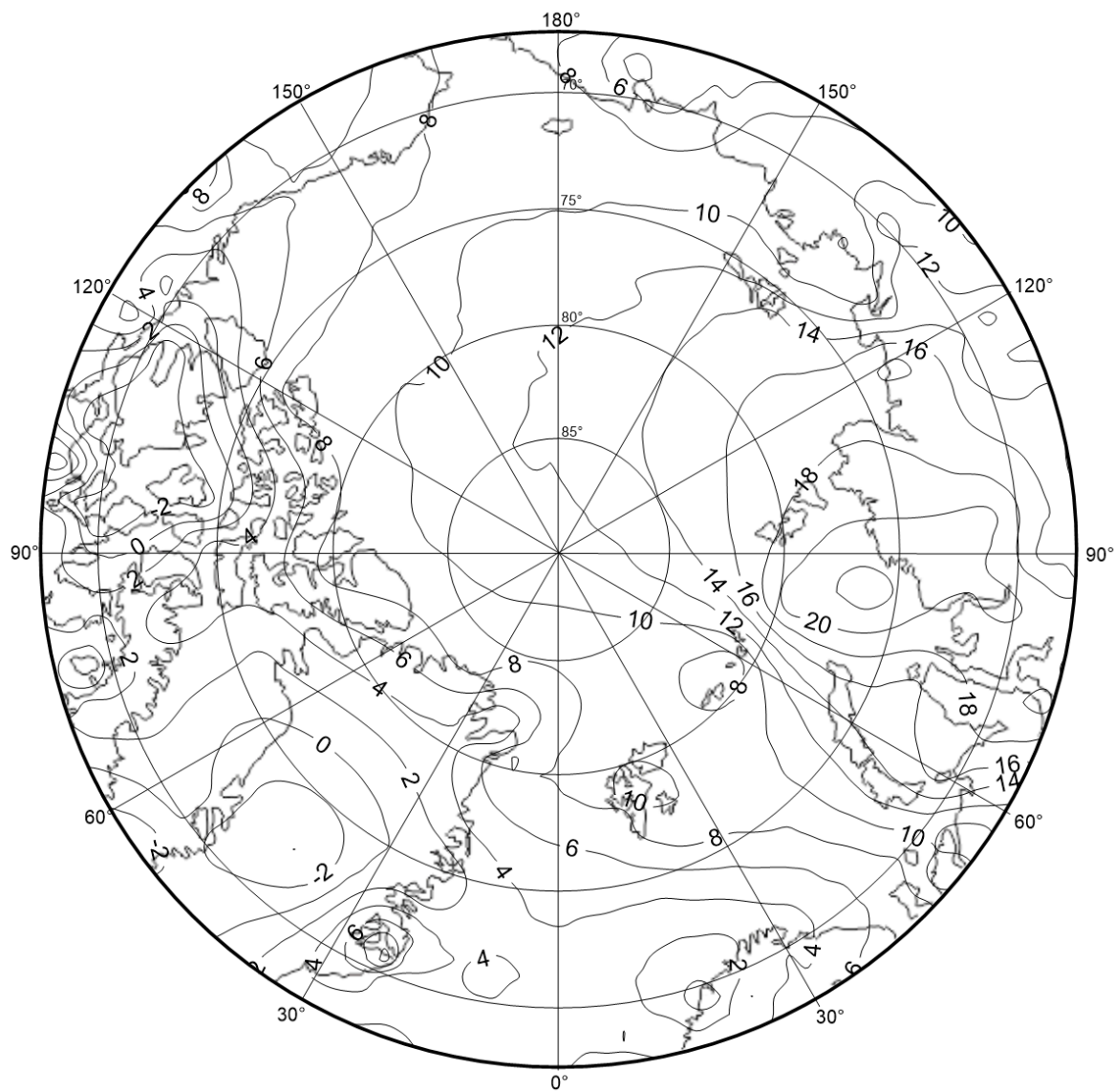
На юге Гренландии наблюдаем небольшое похолодание

Распределение крупномасштабное, но имеются зоны больших градиентов по горизонтальным переменным. Теперь по глобусу.

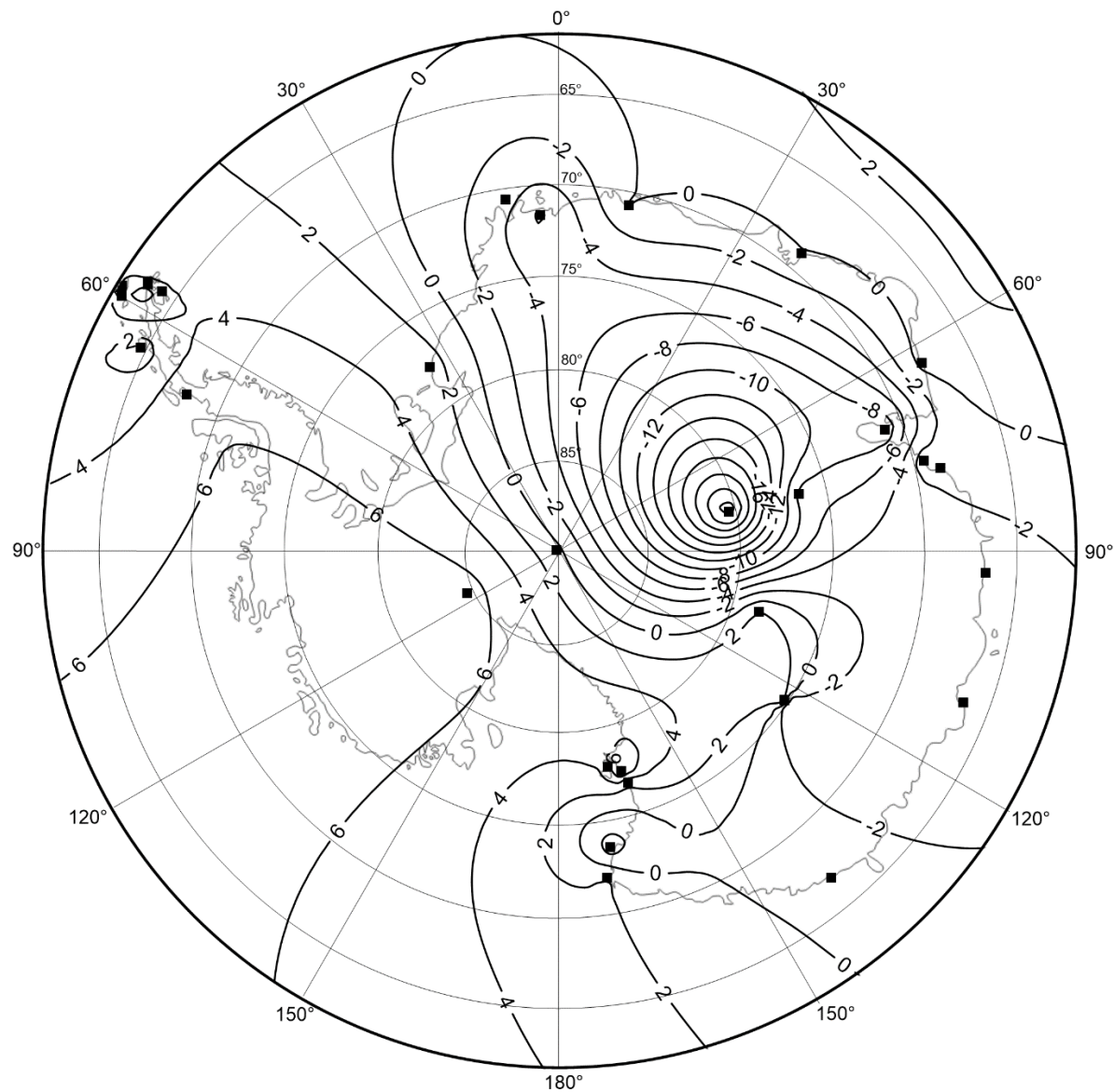


Изменение среднегодовой температуры в градусах/100 лет. Внеполярная зона.





Изменение среднегодовой температуры в градусах/100 лет. Арктика



Изменение среднегодовой температуры в градусах/100 лет. Антарктика

Map of the Northern Hemisphere showing isotherms for January. The map covers the Arctic region and surrounding landmasses, including Europe, Asia, and North America. Isotherms are labeled with values such as -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180. Major cities and locations are marked with dots and labeled in Russian, including Moscow, St. Petersburg, and various cities in Asia and North America.

46

Получаемое таким образом описание сезонного и суточного хода, разумеется, не точное, поскольку момент достижения максимума рассматриваемых периодических функций совпадает с моментом максимума ее первой гармоники лишь приблизительно. Заметим, что момент минимума при такой аппроксимации лишь первой гармоникой отстоит от момента максимума ровно на половину года (что на практике выполняется с заметной погрешностью). Аналогичные соотношения предполагаются и для суточного хода аппроксимируемой функции температуры. Предлагаемый алгоритм можно модифицировать, увеличив число базисных функций, добавив вторые гармоники.

Для коэффициентов  $b_4(m)$ ,  $b_5(m)$  сделаем преобразование. Вычислим для сезонного хода амплитуду  $\Theta(m) = \sqrt{b_4^2(m) + b_5^2(m)}$  и фазу  $\Phi(m) = \arctg[b_5(m) / b_4(m)]$ . Аналогично определяем амплитуду и фазу для суточного хода:  $\vartheta(m) = \sqrt{b_2^2(m) + b_3^2(m)}$  и  $\varphi(m) = \arctg[b_3(m) / b_2(m)]$ . Здесь фаза может принимать значения в области  $[0, 2\pi)$ . Для перевода из радианов в привычные сутки/год и часы/год, соответственно, нужно умножать безразмерную величину  $\Phi(m)$  на  $\frac{365,25}{2\pi}$  сутки/год, а  $\varphi(m)$  - на  $\frac{24}{2\pi}$  час/год.



Примеры. В случае сезонных колебаний значение  $\Phi(m) = 0$  соответствует максимуму функции  $f$  примерно при  $k=0$ , значение  $\Phi(m) = \pi / 2 \approx 1,58$  соответствует максимуму  $f$  при  $k=\text{год}/4$  ( $=365,25/4 = 91,3125$  суток), т.е. максимум такой функции достигается примерно 1-2 апреля. Значение  $\Phi(m) = \pi \approx 3,14$  соответствует максимуму  $f$  при  $k=\text{год}/2$  ( $=365,25/2 = 182,625$  суток), т.е. максимум примерно 2-3 июля. Минимум в данной модели достигается всегда спустя полгода после максимума.

Положительная тенденция фазы сезонных колебаний (в тысячных долях суток в год) означает, что с годами лето и зима начинаются позднее, а отрицательная тенденция - раньше. Из приведенной карты следует, что среднее запаздывание приходов максимальных и минимальных температур в районе о.Визе составляет более 0,6 суток/год. Напротив, в окрестностях Пекина сезоны в анализируемый двадцатилетний период наступают раньше; около Пекина в среднем почти на сутки/год.

В результате имеем 5 функций дискретного времени (года)  $m$ :

$g(m): b_1(m), \mathcal{J}(m), \varphi(m), \Theta(m), \Phi(m), \quad m = 1, \dots, M, \quad M = 20$ . Для каждой из этих пяти функций можно однотипно построить наилучшую (в смысле минимального среднеквадратического приближения) линейную аппроксимацию:  $g(m) \approx g_0 + g_1 m, \quad g_0, g_1 = \text{const}$ .

Формулы для этих коэффициентов линейной функции весьма просты:

$$g_0 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M g(m), \quad g_1 = \frac{\sum_{m=1}^M g(m) \cdot [m - (M + 1) / 2]}{\sum_{k=1}^M [m - (M + 1) / 2]^2}. \quad (1)$$

Первая константа – среднее значение для данной метеостанции. Вторая – тренд данной величины для этого временного ряда. И анализ именно этой величины является предметом рассмотрения. Среднеквадратичное отклонение результатов от наилучшей линейной аппроксимации и статистическую значимость оценки тренда определим формулами:

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{20} \sum_{m=1}^{20} [C(t_m) - g_0 - g_1 t_m]^2}, \quad Z_f = g_1 M / \sigma_f. \quad (2)$$

Полученную оценку тренда для функции  $f$  считаем значимой, если для нее  $Z_f \geq 1$ .

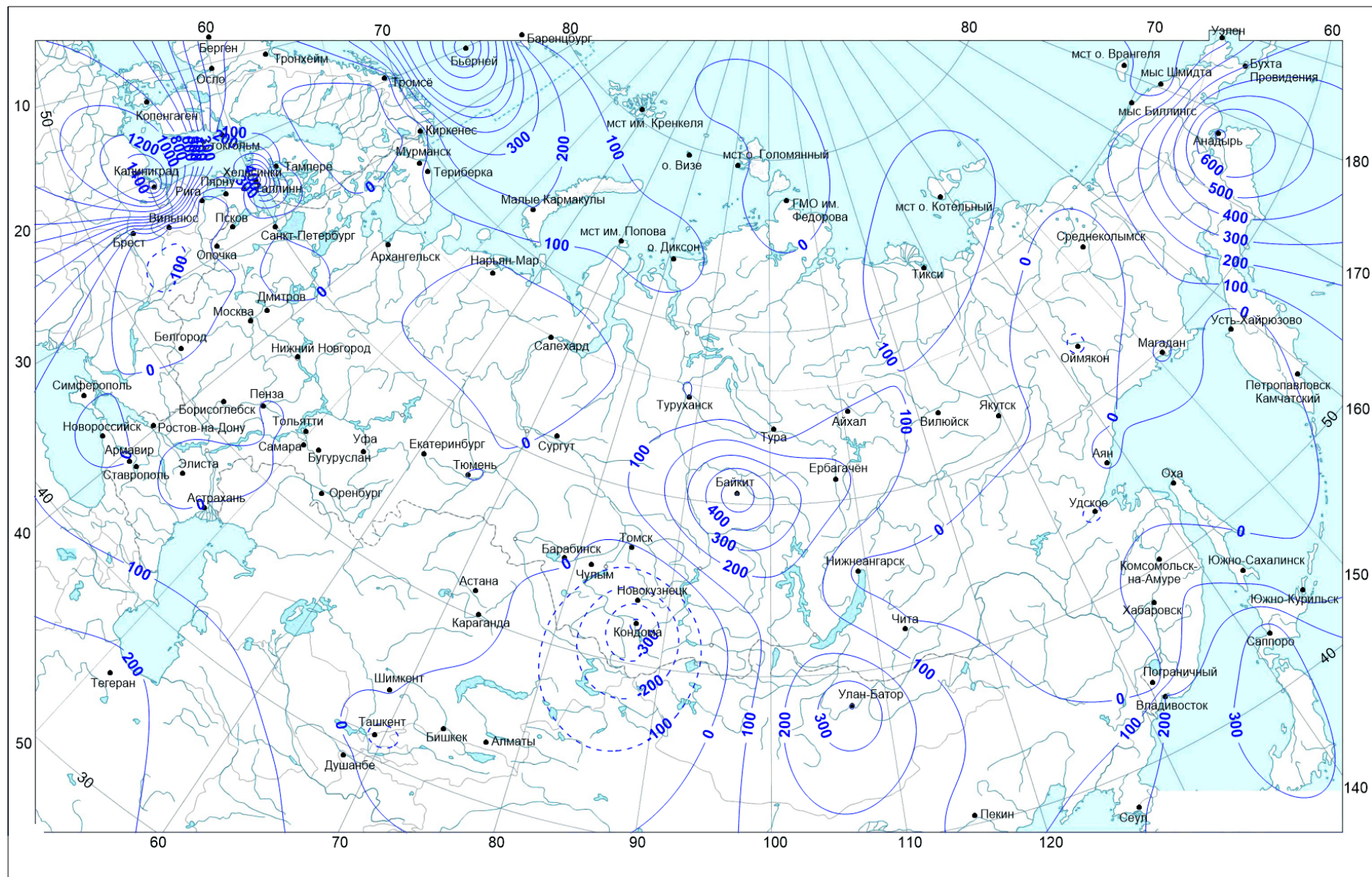


## **Экстремальные температуры – какая динамика**

Экстремальные температуры измеряются по одному разу в сутки. Поэтому суточные колебания исключаются, а для статистической оценки их динамики используются только три коэффициента, а не пять; порядок у матрицы  $Q$  третий.

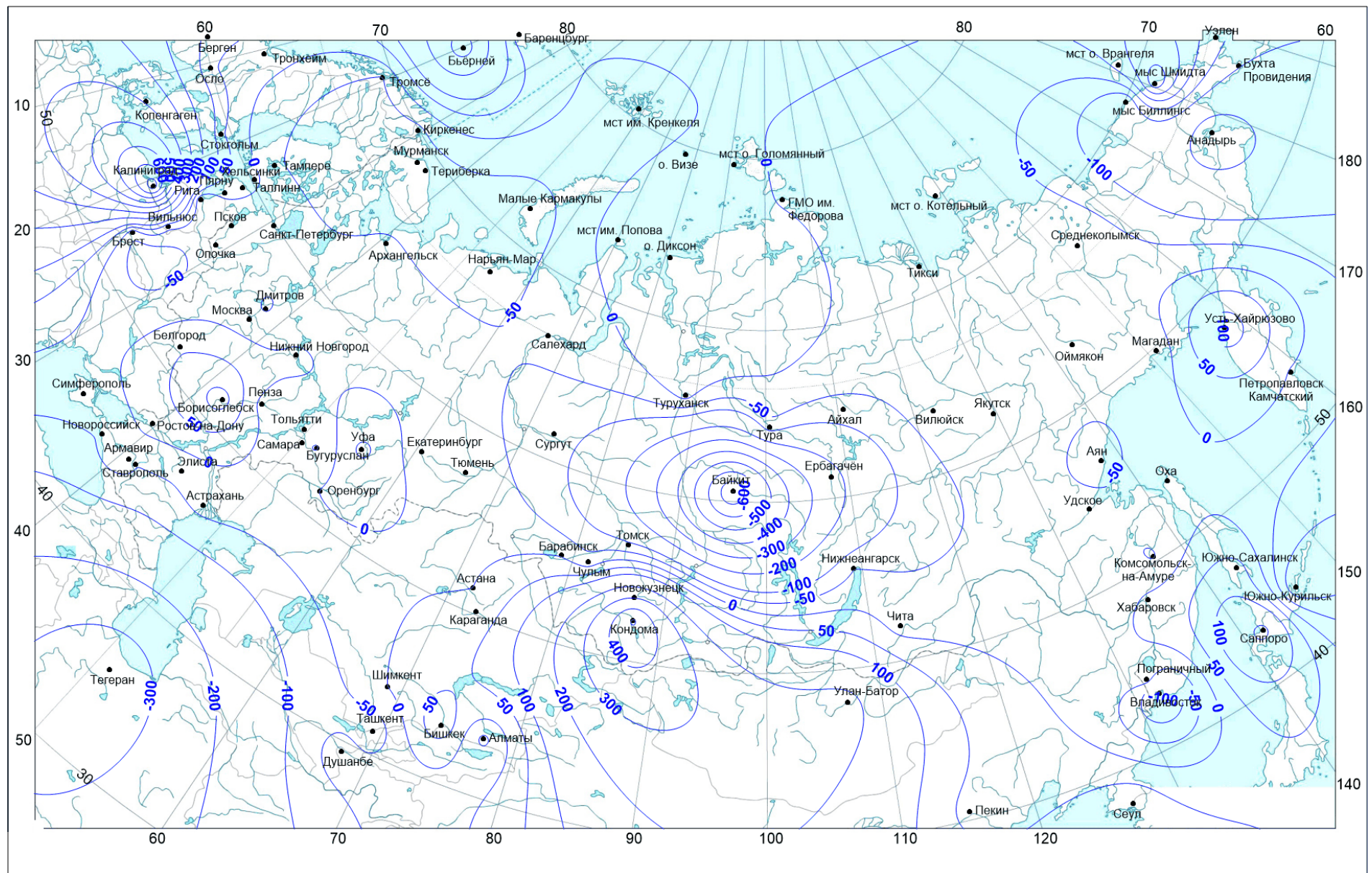
## **Даты крайних заморозков – какая динамика**

Кроме того, важным для сельского хозяйства климатическим параметром являются даты заморозков (последнего и первого). Даты крайних заморозков – два числа для каждого года - оцениваются по архиву очевидным образом.



Первые заморозки (сутки за 1000 лет)





Дата последнего заморозка.

## Обсуждение результатов и заключение.

Рассмотренные и показанные на рисунках изменения крупномасштабны (характерный масштаб  $10^3$  км при наличии сравнительно узких зон больших градиентов). Среднегодовая температура (равно как и среднегодовая минимальная) росла почти во всех пунктах России, хотя не монотонно и с существенно различной скоростью. В некоторых регионах статистически значимого тренда вообще не наблюдалось или он был слабо отрицательным. На планете имеются регионы, где среднегодовая температура за последние 23 года заметно понизилась. Особенно это видно в Антарктиде.

Даты последнего весеннего и первого осеннего заморозков важны для сельского хозяйства и транспорта. Эти две даты на рассматриваемой территории менялись разнонаправленно. В большинстве регионов России период между этими заморозками (т.е. сравнительно теплый период) возрос. Самое заметное увеличение этого периода со временем наблюдалось в районе Байкита, где это удлинение превосходит 1 сутки/год.

Такие оценки могут быть проведены для количества осадков, влажности воздуха, балла облачности.

Можно расширить список базисных функций, добавив гармоники с полугодовым периодом. Помимо увеличения точности аппроксимации это позволит отказаться от

жесткой фиксации моментов максимума и минимума температуры в определенные дни года.

Можно также оценить средние температуры за какой-то месяц или сезон года и их межгодовой тренд. Такие тренды могут быть более важными, чем тренд среднегодовой температуры, например, для некоторых агрометеорологических оценок, планирования строительства или спортивных соревнований.

Достаточно точное воспроизведение климатической моделью перечисленных здесь метеорологических параметров атмосферы, а не только правдоподобное описание тенденции среднегодовой температуры, было бы важным доказательством надежности модели, а значит, и надежности ее прогнозов климатических изменений (в том числе, антропогенных) в атмосфере Земли.

Важнейший и остающийся без убедительного ответа вопрос - причины этих тенденций. Учитывая географию регионов, где тенденция к потеплению максимальна, нет оснований полагать главной причиной антропогенный фактор. Учитывая слабый рост температуры в Баренцевом море и существенно более сильный в морях Северного Ледовитого океана, омывающих Сибирь почти вплоть до Чукотки, затруднительно объяснить произошедшие изменения в атмосфере следствием изменений в Гольфстриме.

Гипотезы. Возможно изменение крупномасштабных течений в северной части Северного Ледовитого океана – там, где вечные льды препятствуют регулярным измерениям параметров воды. Учитывая разнонаправленные тенденции в разных регионах, нет оснований считать единственным фактором астрономический (флуктуации орбиты, изменение активности Солнца). Также возможным представляется изменение геометрии и интенсивности тепловых процессов внутри планеты. Изменение тепловых потоков от ядра Земли к атмосфере приводят к изменениям, незначительным на фоне атмосферных процессов в масштабе суток – месяц – год, но их влияние может накапливаться на масштабе в десятки лет.

Географическое распределение районов заметного потепления не дает оснований для вывода о его антропогенном происхождении.

### **Литература**

1. С. М. Семенов, Е. С. Гельвер. Синусоидальная аппроксимация годового хода среднесуточной температуры воздуха на территории России в XX веке. Метеорология и гидрология, №2, 2002, №2, СС.25-30.



2. IPCC, 2021: Summary for Policymakers. In: Climate Change 2021: The Physical Science Basis. Contribution of Working Group I to the Sixth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change [Masson-Delmotte, V., P. Zhai, A. Pirani, S.L. Connors, C. Péan, S. Berger, N. Caud, Y. Chen, L. Goldfarb, M.I. Gomis, M. Huang, K. Leitzell, E. Lonnoy, J.B.R. Matthews, T.K. Maycock, T. Waterfield, O. Yelekçi, R. Yu, and B. Zhou (eds.)]. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom and New York, NY, USA, pp. 3–32.
3. В.А.Гордин. О некоторых оценках климатических изменений в России. Метеорология и гидрология, 2023, №11, стр.65-75.