О случайных тензорных моделях в теории случайных матриц

Павел Яськов

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН
НИТУ МИСИС, СПбГУ

01 июня 2025 г.

План

- Введение
- Несимметричная случайная тензорная модель
- Симметричная случайная тензорная модель
- Литература

Введение

- Следуя Pajor&Pastur (2009), назовем $\mathrm{x} = \mathrm{x}(p) \sim \mathbb{C}^p$ **хорошими** случайными векторами,

Введение

- Следуя Pajor&Pastur (2009), назовем $x = x(p) \sim \mathbb{C}^p$ **хорошими** случайными векторами, если $x \in L_2$ и

$$P(|x^* A x - E x^* A x)| > \varepsilon p) \to 0, \quad p \to \infty,$$

для всех $\varepsilon > 0$ равномерно по $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$ $\|A\| \leqslant 1$.

- Следуя Pajor&Pastur (2009), назовем $\mathrm{x} = \mathrm{x}(p) \sim \mathbb{C}^p$ **хорошими** случайными векторами, если $\mathrm{x} \in L_2$ и

$$\mathrm{P}(|\mathrm{x}^* A\mathrm{x} - \mathrm{E}\mathrm{x}^* A\mathrm{x})| > \varepsilon p) \to 0, \quad p \to \infty,$$

  для всех $\varepsilon > 0$ равномерно по $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$ $\|A\| \leqslant 1$.
  Пример 1. $\mathrm{x} = \mathrm{x}(p)$ имеют независимые центрированные компоненты с равномерно ограниченными моментами некоторого порядка, большего 2.

- Следуя Pajor&Pastur (2009), назовем $x = x(p) \sim \mathbb{C}^p$ **хорошими** случайными векторами, если $x \in L_2$ и

$$\mathrm{P}(|x^* A x - \mathrm{E} x^* A x)| > \varepsilon p) \to 0, \quad p \to \infty,$$

для всех $\varepsilon > 0$ равномерно по $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$ $\|A\| \leqslant 1$.
Пример 1. $x = x(p)$ имеют независимые центрированные компоненты с равномерно ограниченными моментами некоторого порядка, большего 2.
Пример 2. $x = x(p) \sim \mathrm{Uniform}(\sqrt{p}\,\mathbb{S}^{p-1})$.

- Следуя Pajor&Pastur (2009), назовем $x = x(p) \sim \mathbb{C}^p$ **хорошими** случайными векторами, если $x \in L_2$ и
$$P(|x^* A x - E x^* A x)| > \varepsilon p) \to 0, \quad p \to \infty,$$
для всех $\varepsilon > 0$ равномерно по $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ $\|A\| \leqslant 1$.
Пример 1. $x = x(p)$ имеют независимые центрированные компоненты с равномерно ограниченными моментами некоторого порядка, большего 2.
Пример 2. $x = x(p) \sim \mathrm{Uniform}(\sqrt{p}\,\mathbb{S}^{p-1})$.
- Случайные матричные модели для матриц Грама и их обобщений, порожденные **хорошими** векторами, обладают универсальными предельными спектральными распределениями.

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p \times p}$:

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p\times p}$:

$$\widehat{\mu}_H = \frac{1}{p} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(H)} \delta_\lambda.$$

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p\times p}$:

$$\widehat{\mu}_H = \frac{1}{p} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(H)} \delta_\lambda.$$

$\mu =$**предельная спектральная мера** $\Leftrightarrow \mathrm{P}(\widehat{\mu}_{H_N} \xrightarrow{d} \mu) = 1.$

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p\times p}$:

$$\widehat{\mu}_H = \frac{1}{p} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(H)} \delta_\lambda .$$

$\mu =$**предельная спектральная мера** $\Leftrightarrow \mathrm{P}(\widehat{\mu}_{H_N} \xrightarrow{d} \mu) = 1.$

- **Хорошие** матричные модели:

$N^{-1}\mathrm{X}\mathrm{X}^*,$

Введение

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p\times p}$:

$$\widehat{\mu}_H = \frac{1}{p} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(H)} \delta_\lambda .$$

$\mu =$**предельная спектральная мера** $\Leftrightarrow \mathrm{P}(\widehat{\mu}_{H_N} \xrightarrow{d} \mu) = 1.$

- **Хорошие** матричные модели:

$$N^{-1}\mathrm{X}\mathrm{X}^*, \quad N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*,$$

Введение

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p\times p}$:

$$\widehat{\mu}_H = \frac{1}{p} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(H)} \delta_\lambda.$$

$\mu =$**предельная спектральная мера** $\Leftrightarrow \mathrm{P}(\widehat{\mu}_{H_N} \xrightarrow{d} \mu) = 1.$

- **Хорошие** матричные модели:

$$N^{-1}\mathrm{X}\mathrm{X}^*, \quad N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*, \quad H + N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*,$$

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p\times p}$:

$$\widehat{\mu}_H = \frac{1}{p} \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(H)} \delta_\lambda.$$

$\mu =$**предельная спектральная мера** $\Leftrightarrow \mathrm{P}(\widehat{\mu}_{H_N} \xrightarrow{d} \mu) = 1.$

- **Хорошие** матричные модели:

$$N^{-1}\mathrm{X}\mathrm{X}^*, \quad N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*, \quad H + N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*,$$

  где $p = p_N$,

  $\mathrm{X} = \mathrm{X}_N \sim \mathbb{C}^{p\times N}$ имеют независимые **хорошие** столбцы,
  $T = T_N \in \mathbb{R}^{p\times p}$ – диагональные матрицы,
  $H = H_N \in \mathbb{C}^{p\times p}$ – эрмитовы матрицы.

Введение

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p\times p}$:

$$\widehat{\mu}_H = \frac{1}{p}\sum_{\lambda\in \mathrm{Sp}(H)} \delta_\lambda.$$

$\mu =$**предельная спектральная мера** $\Leftrightarrow \mathrm{P}(\widehat{\mu}_{H_N} \xrightarrow{d} \mu) = 1.$

- **Хорошие** матричные модели:

$$N^{-1}\mathrm{X}\mathrm{X}^*, \quad N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*, \quad H + N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*,$$

где $p = p_N$,

$\mathrm{X} = \mathrm{X}_N \sim \mathbb{C}^{p\times N}$ имеют независимые **хорошие** столбцы,

Введение

- Определим *эмпирическую спектральную меру* для эрмитовой матрицы $H \sim \mathbb{C}^{p\times p}$:

$$\widehat{\mu}_H = \frac{1}{p}\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(H)} \delta_\lambda.$$

$\mu =$**предельная спектральная мера** $\Leftrightarrow \mathrm{P}(\widehat{\mu}_{H_N} \xrightarrow{d} \mu) = 1.$

- **Хорошие** матричные модели:

$$N^{-1}\mathrm{X}\mathrm{X}^*, \quad N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*, \quad H + N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*,$$

где $p = p_N$,

$\mathrm{X} = \mathrm{X}_N \sim \mathbb{C}^{p\times N}$ имеют независимые **хорошие** столбцы, точнее, $\mathrm{x} = \mathrm{x}(N)$ – хорошие вектора, где x – случайно выбранный столбец X, и нормы матриц вторых моментов столбцов $= o(p)$ [Yaskov (2018, JoTP)].

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^{n}$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

Несимметричная случайная тензорная модель

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Несимметричная тензорная модель** $\mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Несимметричная тензорная модель** $\mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$
  $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \{1, \ldots, n\}^d)$ и $p = n^d$,

Несимметричная случайная тензорная модель

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Несимметричная тензорная модель** $\mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ $\mathsf{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \{1, \ldots, n\}^d)$ и $p = n^d$, где для н.о.р. копий $\mathcal{X}^{(k)}$ вектора $\mathcal{X}$

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}^{(k)}.$$

Несимметричная случайная тензорная модель

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Несимметричная тензорная модель** $\mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \{1, \ldots, n\}^d)$ и $p = n^d$, где для н.о.р. копий $\mathcal{X}^{(k)}$ вектора $\mathcal{X}$

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}^{(k)}.$$

Модель разм-ти n^d имеет nd независимых порождающих.

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Несимметричная тензорная модель** $\mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \{1, \ldots, n\}^d)$ и $p = n^d$, где для н.о.р. копий $\mathcal{X}^{(k)}$ вектора $\mathcal{X}$

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}^{(k)}.$$

Модель разм-ти n^d имеет nd независимых порождающих.

Ambainis, Harrow, Hastings (2012): $d = O(1)$, $\mathcal{X} \sim \mathrm{Uniform}(\sqrt{p}\,\mathbb{S}^{p-1})$,

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Несимметричная тензорная модель** $\mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \{1, \ldots, n\}^d)$ и $p = n^d$, где для н.о.р. копий $\mathcal{X}^{(k)}$ вектора $\mathcal{X}$

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}^{(k)}.$$

Модель разм-ти n^d имеет nd независимых порождающих.

Ambainis, Harrow, Hastings (2012): $d = O(1)$, $\mathcal{X} \sim \mathrm{Uniform}(\sqrt{p}\,\mathbb{S}^{p-1})$,
Lytova (2018): $d = o(n)$,

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Несимметричная тензорная модель** $\mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \{1, \ldots, n\}^d)$ и $p = n^d$, где для н.о.р. копий $\mathcal{X}^{(k)}$ вектора $\mathcal{X}$

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}^{(k)}.$$

Модель разм-ти n^d имеет nd независимых порождающих.

Ambainis, Harrow, Hastings (2012): $d = O(1)$, $\mathcal{X} \sim \mathrm{Uniform}(\sqrt{p}\,\mathbb{S}^{p-1})$,
Lytova (2018): $d = o(n)$,
Collins, Yau, Yuan (2022): $d = O(n)$, $\mathsf{E}|\xi|^p < \infty$ **при всех** p,

Несимметричная случайная тензорная модель

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Несимметричная тензорная модель** $\mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \{1, \ldots, n\}^d)$ и $p = n^d$, где для н.о.р. копий $\mathcal{X}^{(k)}$ вектора $\mathcal{X}$

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}^{(k)}.$$

Модель разм-ти n^d имеет nd независимых порождающих.

Ambainis, Harrow, Hastings (2012): $d = O(1)$, $\mathcal{X} \sim \mathrm{Uniform}(\sqrt{p}\,\mathbb{S}^{p-1})$,
Lytova (2018): $d = o(n)$,
Collins, Yau, Yuan (2022): $d = O(n)$, $\mathsf{E}|\xi|^p < \infty$ **при всех** p,
Yuan (2024), Yaskov (2025): d **любое,** $|\xi| = 1$ **п.н.**

Несимметричная случайная тензорная модель

Lytova (2018, JoTP):

Несимметричная случайная тензорная модель

Lytova (2018, JoTP): Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n \sim \mathbb{C}^n$ – такие **хорошие** векторы, что $\mathrm{E}\mathcal{X}\mathcal{X}^* = I_n$ при всех n и

$$\exists\, \varepsilon_n \downarrow 0 : \mathrm{Var}(\mathcal{X}^* A \mathcal{X}/n) \leqslant \varepsilon_n \|A\|^2 \text{ для всех } A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Lytova (2018, JoTP): Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n \sim \mathbb{C}^n$ – такие **хорошие** векторы, что $\mathrm{E}\mathcal{X}\mathcal{X}^* = I_n$ при всех n и

$$\exists\ \varepsilon_n \downarrow 0 : \mathrm{Var}(\mathcal{X}^* A \mathcal{X}/n) \leqslant \varepsilon_n \|A\|^2 \text{ для всех } A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Тогда $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ будут **хорошими** при $\varepsilon_n d = o(1)$.

Lytova (2018, JoTP): Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n \sim \mathbb{C}^n$ – такие **хорошие** векторы, что $\mathrm{E}\mathcal{X}\mathcal{X}^* = I_n$ при всех n и

$$\exists\, \varepsilon_n \downarrow 0 : \mathrm{Var}(\mathcal{X}^* A \mathcal{X}/n) \leqslant \varepsilon_n \|A\|^2 \text{ для всех } A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Тогда $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ будут **хорошими** при $\varepsilon_n d = o(1)$. В частности, если компоненты $\mathcal{X}$ независимы с равномерно ограниченными 4-ми моментами, то $\varepsilon_n = 1/n$ отвечает условию $d = o(n)$.

Несимметричная случайная тензорная модель

Lytova (2018, JoTP): Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n \sim \mathbb{C}^n$ – такие **хорошие** векторы, что $\mathsf{E}\mathcal{X}\mathcal{X}^* = I_n$ при всех n и

$$\exists\ \varepsilon_n \downarrow 0 : \mathrm{Var}(\mathcal{X}^* A \mathcal{X}/n) \leqslant \varepsilon_n \|A\|^2 \text{ для всех } A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Тогда $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ будут **хорошими** при $\varepsilon_n d = o(1)$. В частности, если компоненты $\mathcal{X}$ независимы с равномерно ограниченными 4-ми моментами, то $\varepsilon_n = 1/n$ отвечает условию $d = o(n)$.

Идея. Стандартные оценки для моментов функции $Q = Q(\mathcal{X}^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}^{(d)})$ при $Q = \mathrm{x}^* A \mathrm{x}$

Lytova (2018, JoTP): Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n \sim \mathbb{C}^n$ – такие **хорошие** векторы, что $\mathrm{E}\mathcal{X}\mathcal{X}^* = I_n$ при всех n и

$$\exists\ \varepsilon_n \downarrow 0 : \mathrm{Var}(\mathcal{X}^* A \mathcal{X}/n) \leqslant \varepsilon_n \|A\|^2 \text{ для всех } A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Тогда $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ будут **хорошими** при $\varepsilon_n d = o(1)$. В частности, если компоненты $\mathcal{X}$ независимы с равномерно ограниченными 4-ми моментами, то $\varepsilon_n = 1/n$ отвечает условию $d = o(n)$.

Идея. Стандартные оценки для моментов функции $Q = Q(\mathcal{X}^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}^{(d)})$ при $Q = \mathrm{x}^* A \mathrm{x}$ с использованием факторизации

$$\mathrm{x}^* A \mathrm{x} = (\mathcal{X}^{(k)})^* A_k\, \mathcal{X}^{(k)},$$

Lytova (2018, JoTP): Пусть $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n \sim \mathbb{C}^n$ – такие **хорошие** векторы, что $\mathrm{E}\mathcal{X}\mathcal{X}^* = I_n$ при всех n и

$$\exists\ \varepsilon_n \downarrow 0 : \mathrm{Var}(\mathcal{X}^* A \mathcal{X}/n) \leqslant \varepsilon_n \|A\|^2 \text{ для всех } A \in \mathbb{C}^{n\times n}.$$

Тогда $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$ будут **хорошими** при $\varepsilon_n d = o(1)$. В частности, если компоненты $\mathcal{X}$ независимы с равномерно ограниченными 4-ми моментами, то $\varepsilon_n = 1/n$ отвечает условию $d = o(n)$.

Идея. Стандартные оценки для моментов функции $Q = Q(\mathcal{X}^{(1)}, \ldots, \mathcal{X}^{(d)})$ при $Q = \mathrm{x}^* A \mathrm{x}$ с использованием факторизации

$$\mathrm{x}^* A \mathrm{x} = (\mathcal{X}^{(k)})^* A_k \, \mathcal{X}^{(k)},$$

где $\|A_k\|$ ограничиваетсмя сверху $\|A\| \prod_{j\neq k} \|\mathcal{X}^{(j)}\|^2$.

Collins, Yau, Yuan (2022, EJP), модель $N^{-1}XTX^*$:

Collins, Yau, Yuan (2022, EJP), модель $N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*$:

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – н.о.р. копии $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathsf{E}|\xi|^p < \infty$ при $p \in \mathbb{N}$,

Collins, Yau, Yuan (2022, EJP), модель $N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*$:

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – н.о.р. копии $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathsf{E}|\xi|^p < \infty$ при $p \in \mathbb{N}$, а столбцы $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{n,d,N} \sim \mathbb{C}^{n^d \times N}$ – н.о.р. копии $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$.

Collins, Yau, Yuan (2022, EJP), модель $N^{-1}\mathrm{X} T \mathrm{X}^*$:

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – н.о.р. копии $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathsf{E}|\xi|^p < \infty$ при $p \in \mathbb{N}$, а столбцы $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{n,d,N} \sim \mathbb{C}^{n^d \times N}$ – н.о.р. копии $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$.

Если $\{\tau_k\}_{k \geqslant 1} \subseteq \mathbb{R}$ таковы, что все выборочные моменты $N^{-1} \sum_{k=1}^N \tau_k^p$ имеют пределы m_p при $p \in \mathbb{N}$,

Collins, Yau, Yuan (2022, EJP), модель $N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*$:

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – н.о.р. копии $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathrm{E}\xi = 0$, $\mathrm{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathrm{E}|\xi|^p < \infty$ при $p \in \mathbb{N}$, а столбцы $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{n,d,N} \sim \mathbb{C}^{n^d \times N}$ – н.о.р. копии $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$.

Если $\{\tau_k\}_{k \geqslant 1} \subseteq \mathbb{R}$ таковы, что все выборочные моменты $N^{-1}\sum_{k=1}^N \tau_k^p$ имеют пределы m_p при $p \in \mathbb{N}$, то пределы

$$\mathrm{E} \int \lambda^p \widehat{\mu}_{N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*}(d\lambda) = n^{-d}\mathrm{E}\mathrm{tr}((N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*)^p)$$

существуют и могут быть вычислены явно

Collins, Yau, Yuan (2022, EJP), модель $N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*$:

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – н.о.р. копии $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathsf{E}|\xi|^p < \infty$ при $p \in \mathbb{N}$, а столбцы $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{n,d,N} \sim \mathbb{C}^{n^d \times N}$ – н.о.р. копии $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$.

Если $\{\tau_k\}_{k\geqslant 1} \subseteq \mathbb{R}$ таковы, что все выборочные моменты $N^{-1}\sum_{k=1}^N \tau_k^p$ имеют пределы m_p при $p \in \mathbb{N}$, то пределы

$$\mathsf{E}\int \lambda^p \widehat{\mu}_{N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*}(d\lambda) = n^{-d}\mathsf{E}\mathrm{tr}((N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*)^p)$$

существуют и могут быть вычислены явно как функции m_p, ρ и $\kappa(\mathsf{E}|\xi|^4 - 1)$, где $T = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_N)$,

$$\kappa = \lim d/n \quad \text{и} \quad \rho = \lim n^d/N > 0.$$

Collins, Yau, Yuan (2022, EJP), модель $N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*$:

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – н.о.р. копии $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathrm{E}\xi = 0$, $\mathrm{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathrm{E}|\xi|^p < \infty$ при $p \in \mathbb{N}$, а столбцы $\mathrm{X} = \mathrm{X}_{n,d,N} \sim \mathbb{C}^{n^d \times N}$ – н.о.р. копии $\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)}$.

Если $\{\tau_k\}_{k \geqslant 1} \subseteq \mathbb{R}$ таковы, что все выборочные моменты $N^{-1} \sum_{k=1}^N \tau_k^p$ имеют пределы m_p при $p \in \mathbb{N}$, то пределы

$$\mathrm{E} \int \lambda^p \widehat{\mu}_{N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*}(d\lambda) = n^{-d}\mathrm{E}\mathrm{tr}((N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*)^p)$$

существуют и могут быть вычислены явно как функции m_p, ρ и $\kappa(\mathrm{E}|\xi|^4 - 1)$, где $T = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_N)$,

$$\kappa = \lim d/n \quad \text{и} \quad \rho = \lim n^d/N > 0.$$

Предельное распределение = закон Марченко–Пастура с параметром $\rho > 0$ при $\tau_k \equiv 1$ и $\kappa(\mathrm{E}|\xi|^4 - 1) = 0$.

Yuan (2024, ALEA):
Пусть в условиях результата Collins, Yau, Yuan (2022) $|\xi| = 1$ п.н. (т.е. $\mathsf{E}|\xi|^4 = 1$). Тогда пределы

$$\mathsf{E} \int \lambda^p \widehat{\mu}_{N^{-1}\mathsf{X}T\mathsf{X}^*}(d\lambda) = \mathsf{E}\mathrm{tr}((N^{-1}\mathsf{X}T\mathsf{X}^*)^p)$$

существуют и могут быть вычислены явно как функции m_p и $\rho = \lim n^d/N > 0$, **независящие от** d, т.е. пределы как при $d = 1$.

Yuan (2024, ALEA):
Пусть в условиях результата **Collins, Yau, Yuan (2022)** $|\xi| = 1$ п.н. (т.е. $\mathsf{E}|\xi|^4 = 1$). Тогда пределы

$$\mathsf{E}\int \lambda^p \widehat{\mu}_{N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*}(d\lambda) = \mathsf{E}\mathrm{tr}((N^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*)^p)$$

существуют и могут быть вычислены явно как функции m_p и $\rho = \lim n^d/N > 0$, **независящие от** d, т.е. пределы как при $d = 1$.

Yaskov (2025, ALEA):
Вне зависимости от d при $\mathsf{E}\xi = 0$ и $|\xi| = 1$ п.н.

$$\mathrm{x} = \mathcal{X}^{(1)} \otimes \ldots \otimes \mathcal{X}^{(d)} \text{ – хорошие векторы при } n \to \infty.$$

Последнее следует из неравенства $\mathrm{Var}(\mathrm{x}^* A\mathrm{x}/n^d) \leqslant 2\|A\|^2/n$ справедливого для всех $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$.

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^{n}$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

Симметричная случайная тензорная модель

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^{n}$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Симметричная тензорная модель $\mathcal{X}^{\otimes d}$**

Симметричная случайная тензорная модель

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Симметричная тензорная модель $\mathcal{X}^{\otimes d}$**
  $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \alpha_1 < \ldots < \alpha_d)$ и $p = \binom{n}{d}$, где

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}.$$

Модель разм-ти $\binom{n}{d}$ имеет n независимых порождающих.

Симметричная случайная тензорная модель

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Симметричная тензорная модель $\mathcal{X}^{\otimes d}$**
  $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \alpha_1 < \ldots < \alpha_d)$ и $p = \binom{n}{d}$, где

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}.$$

Модель разм-ти $\binom{n}{d}$ имеет n независимых порождающих.

Bryson, Vershynin, Zhao (2021): $d^3 = o(n)$, $\mathsf{E}|\xi|^4 < \infty$.

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Симметричная тензорная модель $\mathcal{X}^{\otimes d}$**
  $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \alpha_1 < \ldots < \alpha_d)$ и $p = \binom{n}{d}$, где

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}.$$

Модель разм-ти $\binom{n}{d}$ имеет n независимых порождающих.

Bryson, Vershynin, Zhao (2021): $d^3 = o(n)$, $\mathsf{E}|\xi|^4 < \infty$.
Yaskov (2023): $d^2 = o(n)$, $\mathsf{E}|\xi|^4 < \infty$, **или, более общо,**

$$\mathsf{E}|\xi|^4 1(d|\xi|^2 \leqslant n) = o(n), \quad d\mathsf{E}|\xi|^2 1(d|\xi|^2 > n) = o(1),$$

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Симметричная тензорная модель $\mathcal{X}^{\otimes d}$**
  $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \alpha_1 < \ldots < \alpha_d)$ и $p = \binom{n}{d}$, где

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}.$$

Модель разм-ти $\binom{n}{d}$ имеет n независимых порождающих.

Bryson, Vershynin, Zhao (2021): $d^3 = o(n)$, $\mathsf{E}|\xi|^4 < \infty$.
Yaskov (2023): $d^2 = o(n)$, $\mathsf{E}|\xi|^4 < \infty$, **или, более общо,**

$$\mathsf{E}|\xi|^4 1(d|\xi|^2 \leqslant n) = o(n), \quad d\mathsf{E}|\xi|^2 1(d|\xi|^2 > n) = o(1),$$

Yaskov (2025): $d = o(n)$ **или** $n - d = o(n)$ **и** $|\xi| = 1$ **п.н.**

Симметричная случайная тензорная модель

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Симметричная тензорная модель $\mathcal{X}^{\otimes d}$**
  $\mathsf{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \alpha_1 < \ldots < \alpha_d)$ и $p = \binom{n}{d}$, где

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}.$$

Пусть компоненты $\mathcal{X} = (\xi_\alpha)_{\alpha=1}^n$ – независимые копии некоторого $\xi \sim \mathbb{C}$ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$.

- **Симметричная тензорная модель $\mathcal{X}^{\otimes d}$**
  $\mathrm{x} = (x_i : i = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d), \alpha_1 < \ldots < \alpha_d)$ и $p = \binom{n}{d}$, где

$$x_i = \prod_{k=1}^{d} \xi_{\alpha_k}.$$

Yaskov (2023):

$\prod_{k=1}^d \xi_{\alpha_k}$, $1 \leqslant \alpha_1, \ldots, \alpha_d \leqslant n$.

$\prod_{\alpha=1}^n \xi_\alpha / \sqrt{d_\alpha!}$, $\alpha_1 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_d$, $d_\alpha = \sum_{k=1}^d 1(\alpha_k = \alpha)$.

$\prod_{k=1}^d \xi_{\alpha_k}$, $\alpha_1 < \ldots < \alpha_d$.

Вопрос.

Когда симметричные случайные тензоры образуют **хорошие** векторы,

Вопрос.
Когда симметричные случайные тензоры образуют **хорошие** векторы, т.е.

$$\mathsf{P}(|\mathrm{x}^* A\mathrm{x} - \mathsf{E}\mathrm{x}^* A\mathrm{x})| > \varepsilon p) \to 0, \quad p \to \infty,$$

для всех $\varepsilon > 0$ равномерно по $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$ $\|A\| \leqslant 1$?

Вопрос.
Когда симметричные случайные тензоры образуют **хорошие** векторы, т.е.

$$\mathsf{P}(|\mathrm{x}^* A\mathrm{x} - \mathsf{E}\mathrm{x}^* A\mathrm{x})| > \varepsilon p) \to 0, \quad p \to \infty,$$

для всех $\varepsilon > 0$ равномерно по $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ $\|A\| \leqslant 1$?

Случай $\mathsf{E}|\xi|^4 < \infty$. Bryson, Vershynin, Zhao (2021):
$\mathrm{Var}(\mathrm{x}^* A\,\mathrm{x}/\binom{n}{d}) = o(1)$ при $\|A\| = O(1)$, $d = o(\sqrt[3]{n})$.

Вопрос.
Когда симметричные случайные тензоры образуют **хорошие** векторы, т.е.

$$\mathrm{P}(|\mathrm{x}^* A\mathrm{x} - \mathrm{E}\mathrm{x}^* A\mathrm{x})| > \varepsilon p) \to 0, \quad p \to \infty,$$

для всех $\varepsilon > 0$ равномерно по $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ $\|A\| \leqslant 1$?

Случай $\mathrm{E}|\xi|^4 < \infty$. Bryson, Vershynin, Zhao (2021):
$\mathrm{Var}(\mathrm{x}^* A\mathrm{x}/\binom{n}{d}) = o(1)$ при $\|A\| = O(1)$, $d = o(\sqrt[3]{n})$.

Гипотеза. Достаточно $d = o(\sqrt{n})$.

Хорошие оценки сверху для $\mathrm{Var}(x^* A x)$

Случай симметричного тензора существенно *сложнее* несимметричного случая.

Формы $x^* A x$ близки к полиномиальному хаосу вида

$$\sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2d}} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2d}} \xi_{\alpha_1} \cdots \xi_{\alpha_{2d}}.$$

Хорошие оценки сверху для $\mathrm{Var}(x^* A x)$

Случай симметричного тензора существенно *сложнее* несимметричного случая.

Формы $x^* A x$ близки к полиномиальному хаосу вида

$$\sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2d}} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2d}} \xi_{\alpha_1} \cdots \xi_{\alpha_{2d}}.$$

Известные моментные неравенства концентрации содержат неопределенную (часто экспоненциальную) зависимость d.

Хорошие оценки сверху для $\mathrm{Var}(x^* A x)$

Случай симметричного тензора существенно *сложнее* несимметричного случая.

Формы $x^* A x$ близки к полиномиальному хаосу вида

$$\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{2d}} a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2d}}\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_{2d}}.$$

Известные моментные неравенства концентрации содержат неопределенную (часто экспоненциальную) зависимость d.

Один из основных методов получения таких неравенств – *декаплинг*, т.е. сведение к случаю

$$\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{2d}} a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2d}}\xi^{(1)}_{\alpha_1}\ldots\xi^{(2d)}_{\alpha_{2d}}.$$

Хорошие оценки сверху для $\mathrm{Var}(x^* A x)$ ...

Формы $x^* A x$ близки к полиномиальному хаосу вида

$$\sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2d}} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2d}} \xi_{\alpha_1} \cdots \xi_{\alpha_{2d}}.$$

Хорошие оценки сверху для $\mathrm{Var}(\mathrm{x}^* A \mathrm{x})$ ...

Формы $\mathrm{x}^* A \mathrm{x}$ близки к полиномиальному хаосу вида

$$\sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2d}} a_{\alpha_1 \ldots \alpha_{2d}} \xi_{\alpha_1} \cdots \xi_{\alpha_{2d}}.$$

Теорема (Yaskov, 2023)

Если $p = \binom{n}{d}$, $A \in \mathbb{C}^{p \times p}$ и $4d^2 \mathrm{E}|\xi|^4 \leqslant n$, то

$$\mathrm{Var}(\mathrm{x}^* A \mathrm{x}/p) \leqslant C \|A\|^2 \frac{d^2 \mathrm{E}|\xi|^4}{n}.$$

Хорошие оценки сверху для $\mathrm{Var}(\mathrm{x}^* A \mathrm{x})$ ...

Формы $\mathrm{x}^* A \mathrm{x}$ близки к полиномиальному хаосу вида

$$\sum_{\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{2d}} a_{\alpha_1\ldots\alpha_{2d}}\xi_{\alpha_1}\ldots\xi_{\alpha_{2d}}.$$

Теорема (Yaskov, 2023)

Если $p = \binom{n}{d}$, $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ и $4d^2\mathrm{E}|\xi|^4 \leqslant n$, то

$$\mathrm{Var}(\mathrm{x}^* A \mathrm{x}/p) \leqslant C\|A\|^2\frac{d^2\mathrm{E}|\xi|^4}{n}.$$

Замечание. Неравенство Хефдинга для дисперсии U-статистик дает $\mathrm{Var}(\|\mathrm{x}\|^2/p) \geqslant \dfrac{\mathrm{Var}(|\xi|^2)d^2}{n}$.

Теорема (Yaskov, 2023, ECP)

Если $\mathrm{x} = \mathrm{x}(n, d)$ следуют симметричной случайной тензорной модели, порождаемой ξ с $\mathrm{E}\xi = 0$, $\mathrm{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathrm{P}(|\xi| = 1) < 1$, то $\mathrm{x} = \mathrm{x}(n, d)$ **хорошие** векторы тогда и только тогда, когда

$$d^2 \mathrm{E}|\xi|^4 1(d|\xi|^2 \leqslant n) = o(n), \;\; d\mathrm{E}|\xi|^2 1(d|\xi|^2 > n) = o(1). \;\; (*)$$

Теорема (Yaskov, 2023, ECP)

Если $\mathrm{x} = \mathrm{x}(n,d)$ следуют симметричной случайной тензорной модели, порождаемой ξ с $\mathsf{E}\xi = 0$, $\mathsf{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathsf{P}(|\xi| = 1) < 1$, то $\mathrm{x} = \mathrm{x}(n,d)$ **хорошие** векторы тогда и только тогда, когда

$$d^2\mathsf{E}|\xi|^4 1(d|\xi|^2 \leqslant n) = o(n), \; d\mathsf{E}|\xi|^2 1(d|\xi|^2 > n) = o(1). \quad (*)$$

Замечание: $n^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*$ будут иметь универсальные предельные распределения для $T = \mathrm{diag}(\tau_1, \ldots, \tau_n) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда выполнено $(*)$.

Теорема (Yaskov, 2023, ECP)

Если $\mathrm{x} = \mathrm{x}(n, d)$ следуют симметричной случайной тензорной модели, порождаемой ξ с $\mathrm{E}\xi = 0$, $\mathrm{E}|\xi|^2 = 1$ и $\mathrm{P}(|\xi| = 1) < 1$, то $\mathrm{x} = \mathrm{x}(n, d)$ **хорошие** векторы тогда и только тогда, когда

$$d^2\mathrm{E}|\xi|^4 1(d|\xi|^2 \leqslant n) = o(n), \; d\mathrm{E}|\xi|^2 1(d|\xi|^2 > n) = o(1). \quad (*)$$

Замечание: $n^{-1}\mathrm{X}T\mathrm{X}^*$ будут иметь универсальные предельные распределения для $T = \mathrm{diag}(\tau_1, \dots, \tau_n) \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда выполнено $(*)$.

Теорема (Yaskov, 2025, ALEA)

Если $\mathrm{x} = \mathrm{x}(n, d)$ следуют симметричной случайной тензорной модели, порождаемой ξ с $\mathrm{E}\xi = 0$ и $|\xi| = 1$ п.н., то $\mathrm{x} = \mathrm{x}(n, d)$ **хорошие** векторы $\Leftrightarrow$ $\min\{d, n - d\} = o(n)$.

Симметричная случайная тензорная модель

Симметричная случайная тензорная модель

$$\|\mathrm{x}\|^2 = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} |\xi_{i_1}|^2 \cdots |\xi_{i_d}|^2, \quad S_n^{(d)} := \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} Z_{i_1} \cdots Z_{i_d}.$$

$$\|x\|^2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} |\xi_{i_1}|^2 \cdots |\xi_{i_d}|^2, \quad S_n^{(d)} := \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} Z_{i_1} \cdots Z_{i_d}.$$

Теорема (Yaskov, 2023) Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные невырожденные случайные величины.

$$\|\mathrm{x}\|^2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} |\xi_{i_1}|^2 \cdots |\xi_{i_d}|^2, \quad S_n^{(d)} := \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} Z_{i_1} \cdots Z_{i_d}.$$

Теорема (Yaskov, 2023) Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные невырожденные случайные величины.

Если $\mathrm{E}Z = 1$ и $d = d(n) \in \{1, \ldots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$, то следующие условия эквивалентны при $n \to \infty$:

$$\|x\|^2 = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} |\xi_{i_1}|^2 \cdots |\xi_{i_d}|^2, \quad S_n^{(d)} := \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} Z_{i_1} \cdots Z_{i_d}.$$

Теорема (Yaskov, 2023) Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные невырожденные случайные величины.

Если $\mathsf{E}Z = 1$ и $d = d(n) \in \{1, \ldots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$, то следующие условия эквивалентны при $n \to \infty$:
(i) $S_n^{(d)}/\binom{n}{d} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1$,

$$\|x\|^2 = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} |\xi_{i_1}|^2 \cdots |\xi_{i_d}|^2, \quad S_n^{(d)} := \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} Z_{i_1} \cdots Z_{i_d}.$$

Теорема (Yaskov, 2023) Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные невырожденные случайные величины.

Если $\mathsf{E}Z = 1$ и $d = d(n) \in \{1, \ldots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$, то следующие условия эквивалентны при $n \to \infty$:
(i) $S_n^{(d)} / \binom{n}{d} \xrightarrow{\mathsf{P}} 1$,
(ii) $d(S_n/n - 1) \xrightarrow{\mathsf{P}} 0$ для $S_n = S_n^{(1)}$,

$$\|x\|^2 = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} |\xi_{i_1}|^2 \cdots |\xi_{i_d}|^2, \quad S_n^{(d)} := \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} Z_{i_1}\cdots Z_{i_d}.$$

Теорема (Yaskov, 2023) Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные невырожденные случайные величины.

Если $\mathrm{E}Z = 1$ и $d = d(n) \in \{1, \ldots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$, то следующие условия эквивалентны при $n \to \infty$:
(i) $S_n^{(d)}/\binom{n}{d} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1$,
(ii) $d(S_n/n - 1) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ для $S_n = S_n^{(1)}$,
(iii) $d\mathrm{E}Z\mathrm{I}(dZ > n) \to 0$ и $d^2\mathrm{E}Z^2\mathrm{I}(dZ \leqslant n) = o(n)$.

$$\|\mathrm{x}\|^2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} |\xi_{i_1}|^2 \cdots |\xi_{i_d}|^2, \quad S_n^{(d)} := \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_d \leqslant n} Z_{i_1} \cdots Z_{i_d}.$$

Теорема (Yaskov, 2023) Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные невырожденные случайные величины.

Если $\mathrm{E}Z = 1$ и $d = d(n) \in \{1, \ldots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$, то следующие условия эквивалентны при $n \to \infty$:
(i) $S_n^{(d)} / \binom{n}{d} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1$,
(ii) $d(S_n/n - 1) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ для $S_n = S_n^{(1)}$,
(iii) $d\mathrm{E}Z\mathrm{I}(dZ > n) \to 0$ и $d^2\mathrm{E}Z^2\mathrm{I}(dZ \leqslant n) = o(n)$.

Замечание. Поведение $S_n^{(d)}$ изучалось Halász, Szekely (1976), Szekely (1982), van Es, Helmers (1988), Major (1999), и др.

$$\|\mathrm{x}\|^2 = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} |\xi_{i_1}|^2 \cdots |\xi_{i_d}|^2, \quad S_n^{(d)} := \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_d\leqslant n} Z_{i_1} \cdots Z_{i_d}.$$

Теорема (Yaskov, 2023, ECP) Пусть $Z, Z_1, Z_2, \ldots$ – н.о.р. неотрицательные невырожденные случайные величины.

Если $\mathrm{E}Z = 1$ и $d = d(n) \in \{1, \ldots, n\}$ для $n \in \mathbb{N}$, то следующие условия эквивалентны при $n \to \infty$:
(i) $S_n^{(d)} / \binom{n}{d} \xrightarrow{\mathrm{P}} 1$,
(ii) $d(S_n/n - 1) \xrightarrow{\mathrm{P}} 0$ для $S_n = S_n^{(1)}$,
(iii) $d\mathrm{E}Z\mathrm{I}(dZ > n) \to 0$ и $d^2\mathrm{E}Z^2\mathrm{I}(dZ \leqslant n) = o(n)$.

Замечание. Самая сложная часть (i) $\Rightarrow$ (ii).

Идея доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii)

Следуя методу Halász, Szekely (1976) ...

Идея доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii)

Следуя методу Halász, Szekely (1976) ...

При $d = o(\sqrt{n})$ и $d \to \infty$ тождество

Идея доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii)

Следуя методу Halász, Szekely (1976) ...

При $d = o(\sqrt{n})$ и $d \to \infty$ тождество

$$S_n^{(d)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} S_n^{(k)} (\rho e^{i\theta})^{d-k} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^{n} (Z_k + \rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{(\rho e^{i\theta})^{n-d}}$$

Идея доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii)

Следуя методу Halász, Szekely (1976) ...

При $d = o(\sqrt{n})$ и $d \to \infty$ тождество

$$S_n^{(d)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} S_n^{(k)} (\rho e^{i\theta})^{d-k} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^{n} (Z_k + \rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{(\rho e^{i\theta})^{n-d}}$$

влечет

$$\ln \frac{S_n^{(d)}}{\binom{n}{d}} = \sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k/\rho + 1) - d + d \ln(\rho d/n) + o_{\mathsf{P}}(1),$$

Идея доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii)

Следуя методу Halász, Szekely (1976) ...

При $d = o(\sqrt{n})$ и $d \to \infty$ тождество

$$S_n^{(d)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{n} S_n^{(k)} (\rho e^{i\theta})^{d-k} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \prod_{k=1}^{n} (Z_k + \rho e^{i\theta}) \frac{d\theta}{(\rho e^{i\theta})^{n-d}}$$

влечет

$$\ln \frac{S_n^{(d)}}{\binom{n}{d}} = \sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k/\rho + 1) - d + d \ln(\rho d/n) + o_{\mathrm{P}}(1),$$

где $\rho = \rho(n, Z_1, \ldots, Z_n)$ – единственное решение $\geqslant 0$ уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\rho}{Z_k + \rho} = n - d.$$

Идея доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii) При $d = o(\sqrt{n})$ и $d \to \infty$

$$o_{\mathrm{P}}(1) = \ln \frac{S_n^{(d)}}{\binom{n}{d}} = \sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k/\rho + 1) - d + d\ln(\rho d/n) + o_{\mathrm{P}}(1)$$

Идея доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii) При $d = o(\sqrt{n})$ и $d \to \infty$

$$o_{\mathsf{P}}(1) = \ln \frac{S_n^{(d)}}{\binom{n}{d}} = \sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k/\rho + 1) - d + d\ln(\rho d/n) + o_{\mathsf{P}}(1)$$

позволяет доказать, что

$$d\mathsf{E}Z1(dZ > n) = o(1), \quad (d^2/n)\mathsf{E}Z^2 1(dZ \leqslant n) = o(1).$$

Идея доказательства (i) $\Rightarrow$ (ii) При $d = o(\sqrt{n})$ и $d \to \infty$

$$o_{\mathsf{P}}(1) = \ln \frac{S_n^{(d)}}{\binom{n}{d}} = \sum_{k=1}^{n} \ln(Z_k/\rho + 1) - d + d\ln(\rho d/n) + o_{\mathsf{P}}(1)$$

позволяет доказать, что

$$d\mathsf{E}Z\mathbb{1}(dZ > n) = o(1), \quad (d^2/n)\mathsf{E}Z^2\mathbb{1}(dZ \leqslant n) = o(1).$$

Литература

Bryson, J., Vershynin, R., and Zhao, H.: Marchenko–Pastur law with relaxed independence conditions. RMTA, 2021.

Collins, B., Yao, J., Yuan, W.: On spectral distribution of sample covariance matrices from large dimensional and large k-fold tensor products, EJP, 2022.

Halász, G., and Szekely, G.J.: On the elementary symmetric polynomials of independent random variables. Acta Math. Acad. Sci. H., (1976).

Lytova, A.: Central limit theorem for linear eigenvalue statistics for a tensor product version of sample covariance matrices. J. Theor. Probab., 2018.

Yaskov, P.: Marchenko-Pastur law for a random tensor model, ECP, 2023.

Yaskov, P.: A remark on the spectrum of sample covariance matrices from large random tensors, ALEA, 2025.

Yuan, W.: On spectrum of sample covariance matrices from large tensor vectors, ALEA, 2024.