Поведение ветвящегося блуждания в зависимости от структуры ветвящейся среды

Е.Б. Яровая

yarovaya@mech.math.msu.su

10-я Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-10),
посвященная 90-летию кафедры теории вероятностей
механико-математического факультета
МГУ имени М.В. Ломоносова

Дивноморское, 1–6 июня, 2025г.

- Общая теория марковских случайных процессов была заложена А. Н. Колмогоровым в работе “Об аналитических методах в теории вероятностей”, УМН, вып. 5, (1938), 5–41. К таким процессам относятся ветвящиеся случайные блуждания.
- Е. Б. Дынкин, “Странствия марковского процесса”, Теория вероятн. и ее примен., 16:3 (1971), 409–436, Е.Б. Дынкин, А.А. Юшкевич “Теоремы и задачи о процессах Маркова”, М.:“Наука”, 1967.
- С.А. Молчанов, Е.Б. Яровая, “Большие уклонения для симметричного ветвящегося случайного блуждания по многомерной решетке”, Труды МИАН, 282 (2013), 195–211.
- А.Н. Ширяев, “Броуновское движение и винеровская мера”, М.: МЦМНО, 2023, 2025.
- Е. Б. Яровая, “Пространственная структура ветвящихся случайных блужданий”, М.: МЦМНО, 2024.

Направления исследования ВСБ

Ветвящиеся случайные блуждания (ВСБ) – одно из современных интенсивно развивающихся направлений в теории вероятностей и случайных процессов.

Актуальность данного направления вызвана необходимостью исследования поведения систем, элементы которых могут размножаться, гибнуть и перемещаться по пространству в различных средах по правилам, учитывающим фактор случайности.

К основным направлениям исследования ВСБ можно отнести изучение пространственной структуры ветвящихся случайных блужданий с непрерывным временем и лежащих в их основе случайных блужданий по многомерной решетке

- с различной пространственной динамикой;
- в неоднородных и однородных “ветвящихся” средах;
- в случайных средах;
- при фиксированных пространственных переменных;
- при совместном росте пространственных координат и времени.

Случайное блуждание по точкам $\mathbb{Z}^d$

Пусть элементы матрицы $A = (a(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}}$ удовлетворяют свойствам

1. $a(x,y) \geqslant 0$ при $x \neq y$ и $a(x,x) < 0$ для любого x;
2. $\sum_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y) = 0$ для любого x;
3. $\sup_{x\in\mathbb{Z}^d} |a(x,x)| < \infty$.

Тогда случайный процесс $X_t = \{X_t,\ t \geqslant 0\}$ с непрерывным временем, пространством состояний $\mathbb{Z}^d$, некоторым начальным распределением и генератором A называется *стохастическим (случайным) блужданием по* $\mathbb{Z}^d$. Дополнительно потребуем, чтобы для X_t выполнялись условия:

4. $a(x,y) \equiv a(y,x)$ (симметричность) ;
5. $a(x,y) \equiv a(\mathbf{0}, y-x) = a(y-x)$ (пространственная однородность);
6. для любых $x, y \in \mathbb{Z}^d$ найдется момент $t > 0$ такой, что $P\left(X_t = y \mid X_0 = x\right) > 0$ (неприводимость).

Стохастическое блуждание X_t есть марковская цепь с непрерывным временем и счетным числом состояний.

Переходные вероятности случайного блуждания

Через $p(t,x,y)$ обозначим *переходную вероятность* стохастического блуждания $P\left(X_t = y \mid X_0 = x\right)$, т.е. вероятность того, что в момент времени $t \geqslant 0$ частица находится в точке y при условии, что в момент времени $t=0$ она находилась в точке x. Тогда, при $h \downarrow 0$ имеет место представление:

$$p(h,x,y) = \begin{cases} a(x,y)h + o(h) & \text{при } x \neq y, \\ 1 + a(x,x)h + o(h) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее без ограничения общности можем предполагать, что в момент времени $t = 0$ процесс X_t находится в начале координат $x = 0$.
Вероятность $p(t,x,y)$ удовлетворяет системе *обратных уравнений Колмогорова*

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = (\mathcal{A}p(t,\cdot,y))(x), \qquad p(0,x,y) = \delta_y(x),$$

где $\mathcal{A}$ — линейный ограниченный оператор в $l^p(\mathbb{Z}^d)$:

$$(\mathcal{A}u)(z) := \sum_{z' \in \mathbb{Z}^d} a(z - z')u(z').$$

Условия на дисперсию скачков стохастического блуждания

Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $\mathbb{Z}^d$.

Будем рассматривать два случая:

- $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\|x\|^2 a(\mathbf{0},x)<\infty$. В этом случае стохастическое блуждание X_t имеет конечную дисперсию скачков.
- $\lim_{\|x\|\to\infty} a(\mathbf{0},x)\|x\|^{d+\alpha}=H(x\|x\|^{-1})$, где $\alpha\in(0,2), x\in\mathbb{Z}^d$ и $H:\mathbf{S}^{d-1}\to\mathbb{R}$, $H(x)=H(-x), x\in\mathbf{S}^{d-1}$ — непрерывная положительная функция, определенная на сфере $\mathbf{S}^{d-1}$ размерности $d-1$, тогда $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d}\|x\|^2 a(\mathbf{0},x)=\infty$. В этом случае стохастическое блуждание X_t имеет бесконечную дисперсию скачков.

Время нахождения случайного блуждания в точке $\mathbb{Z}^d$ к моменту времени t

Через ξ_t будем обозначать основной объект исследования —время нахождения траектории блуждания в начале координат за время $(0,t]$, а среднее время пребывания траектории блуждания в начале координат за время $t > 0$ при условии, что в момент $t = 0$ процесс находился в начале координат через $\mathbf{E}\xi_t$.

Величину

$$G_\lambda(x,y) = \lim_{t\to\infty} G_\lambda(t,x,y) = \lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\lambda u} p(u,x,y)du,$$

являющуюся предельным значением на бесконечности преобразования Лапласа переходной вероятности $p(t,x,y)$, называют *функцией Грина* стохастического блуждания.

Положим $\lambda = 0$, тогда при любом $t > 0$ выполняется равенство

$$\mathbf{E}\xi_t = G_0(t,0,0) = \int_0^t p(s,0,0)\,ds.$$

Функция $G_0(t,0,0)$ имеет простой вероятностный смысл: она представляет собой среднее время пребывания частицы в точке $y = 0$ до момента времени t при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ частица находилась в точке $x = 0$.

Пусть $G_0 := G_0(0,0) = \int_0^\infty p(s,0,0)\,ds$.

- Если $\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \|x\|^2 a(\mathbf{0},x) < \infty$, то $p(t,0,0) \sim \frac{\gamma_d}{t^{\frac{d}{2}}}$ при $t\to\infty$ и $G_0 = \infty$ при $d = 1,2$, в то время как $G_0 < \infty$ при $d \geq 3$.
- Пусть $0 < \alpha < 2$ и выполнено условие, приводящее к бесконечной дисперсии скачков, то $p(t,0,0) \sim \frac{h_{\alpha,d}}{t^{\frac{d}{\alpha}}}$ при $t\to\infty$ и $G_0 = \infty$ при $d = 1$ и $\alpha \in [1,2)$, в то время как $G_0 < \infty$ при $d = 1$ и $\alpha \in (0,1)$ или $d \geq 2$ и $\alpha \in (0,2)$.

Таким образом,

- стохастическое блуждание X_t с конечной дисперсией скачков возвратно в размерностях $d = 1$ и $d = 2$ и невозвратно в размерностях $d \geqslant 3$;
- стохастическое блуждание X_t с бесконечной дисперсией скачков возвратно для $d = 1$ при условии $\alpha \in [1,2)$ и невозвратно для $d = 1$ при условии $\alpha \in (0,1)$ или для $d \geqslant 2$ при условии $\alpha \in (0,2)$.

Теорема о распределении времени пребывания случайного блуждания в точке $\mathbb{Z}^d$

Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания X_t по $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$, и $x \geq 0$ при $t \to \infty$ имеют место соотношения:

- при конечной дисперсии скачков

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{\xi_t}{\mathbf{E}\xi_t} \leqslant x\right] = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}}\,dt \quad \text{при } d = 1,$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{\xi_t}{\mathbf{E}\xi_t} \leqslant x\right] = 1 - e^{-x} \quad \text{при } d \geq 2,$$

- при условии, приводящем к бесконечной дисперсии скачков,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{\xi_t}{\Gamma(1+\theta)\mathbf{E}\xi_t} \leqslant x\right] = \mathbf{P}(\zeta_\theta \leqslant x) \quad \text{при} \quad d = 1,\ \alpha \in (1,2),$$

где ζ_θ — случайная величина, имеющая распределение Миттаг-Леффлера для $\theta = 1 - 1/\alpha$ с плотностью $g_\theta(y) = \frac{1}{\pi\theta}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j-1}}{j!}\sin(\pi\theta j)\,\Gamma(\theta j + 1)y^{j-1}$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\frac{\xi_t}{\mathbf{E}\xi_t} \leqslant x\right] = 1 - e^{-x} \quad \text{при} \quad \begin{array}{l} d = 1,\ \alpha \in (0,1], \\ d \geqslant 2,\ \alpha \in (0,2). \end{array}$$

Некоторые замечания

- В сформулированной теореме $\alpha \in (0, 2)$. Если положить $\alpha = 2$, то случайное блуждание в этом случае имеет конечную дисперсию скачков и справедливо равенство $\mathbf{P}(\zeta_{1/2} \leqslant x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{4}} \, dt$.
- Для невозвратного случайного блуждания в зависимости от размерности d решетки $\mathbb{Z}^d$ и свойств дисперсии стохастического блуждания имеем $G_0 = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\xi_t = C_d < \infty$ или $G_0 = \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}\xi_t = C_{\alpha,d} < \infty$. В этом случае без нормировки на $\mathbf{E}\xi_t$ справедливы утверждения:

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\xi_t \leqslant x\right] = 1 - e^{-\frac{x}{C_d}}, \qquad \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}\left[\xi_t \leqslant x\right] = 1 - e^{-\frac{x}{C_{\alpha,d}}}.$$

Значения констант C_d и $C_{\alpha,d}$ уменьшаются с увеличением размерности решетки d. Таким образом, параметр экспоненциального распределения растет с увеличением размерности решетки d.

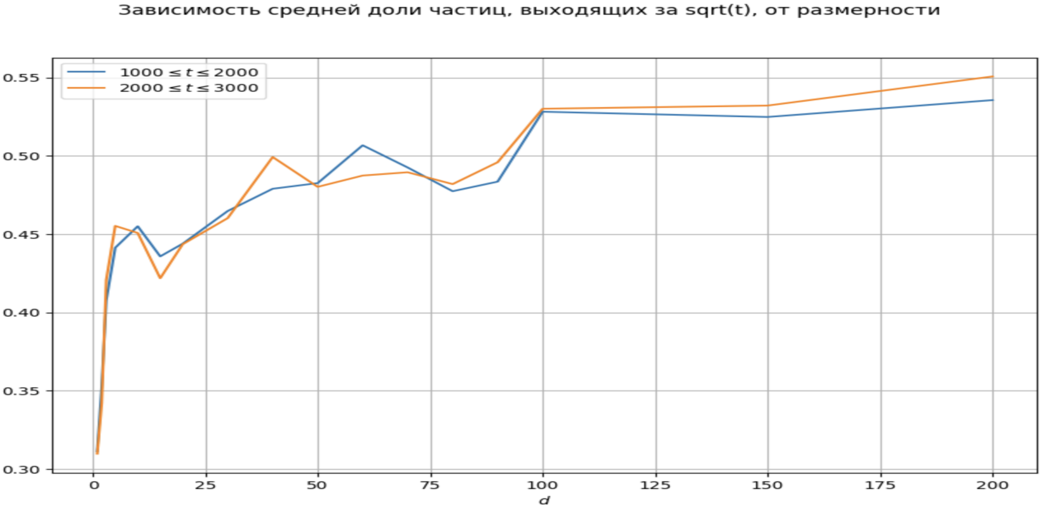
Результаты моделирования траекторий стохастического блуждания с конечной дисперсией

Приведем результаты моделирования траекторий симметричного случайного блуждания X_t с одним типом частиц, где рассмотрены результаты для размерностей решетки $d = 1, \ldots, 200$.

Установлен достаточно быстрый рост средней доли частиц при рассмотрении 1000 траекторий случайного блуждания, выходящих за пределы $\sqrt{t}$ с ростом размерности решетки d, что связано с “нарастанием” свойства невозвратности блуждания, т.е. в этом случае при $d \geq 3$ среднее число возвращений случайного блуждания в начало координат конечно и уменьшается с увеличением размерности d.

Средняя доля траекторий блуждания по $\mathbb{Z}^d$, выходящих за $\sqrt{t}$

На графике изображена зависимость средней доли частиц, выходящих за $\sqrt{t}$, в зависимости от размерности решетки d. Среднее берется по всем моментам времени, начиная с $t = 2000$.



Перейдем к рассмотрению ВСБ. Процесс ветвления, т.е. размножения и гибели частиц, в точках $x \in \mathbb{Z}^d$ определяется инфинитезимальной производящей функцией

$$f(u,x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(x) u^k,$$

где $0 \leqslant u \leqslant 1$, $b_k(x) \geqslant 0$ при $k \neq 1$, $b_1(x) \leqslant 0$ и $\sum_{k \neq 1} b_k(x) = |b_1| < \infty$.

Пусть $f^{(r)}(1,x) < \infty$ для каждого $x \in \mathbb{Z}^d$ при $r = 1, 2$.

Величину $\beta(x) = f'(1,x) = \sum_k k b_k(x)$ называют *интенсивностью ветвления* в точке $x \in \mathbb{Z}^d$ и $\beta_2(x) = f^{(2)}(1,x)$ — *вторым факториальным моментом* производящей функции потомков $f(u,x)$.

Предполагается, что

- $\beta(x) \to 0$ при $\|x\| \to \infty$, где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2(\mathbb{Z}^d)$.

Функции $a(x)$ и $f(u,x)$ определяют марковский процесс.

Предполагается, что частица, находящаяся в точке x, за малое время h

- с вероятностью $p(h,x,y) = a(x-y)h + o(h)$ переходит в точку $y \neq x$,
- либо не совершает такого перехода и при этом с вероятностью $p_*(h,x,k) = b_k h + o(h)$ производит потомство из $k \neq 1$ частиц, остающихся в точке x (считается, что и сама частица входит в это число, а при $k=0$ говорят, что *частица гибнет*),
- либо с вероятностью $1 - \sum_{y\neq x} a(x-y)h - \sum_{k\neq 1} b_k(x)h + o(h)$ никаких изменений с частицей не происходит.

Отдельные частицы эволюционируют независимо друг от друга и от всей предыстории.

Основным объектом исследования является численность частиц $\mu_{t,x}(y)$ в момент времени t в произвольной фиксированной точке $y \in \mathbf{Z}^d$ при условии, что в начальный момент времени у нас имелась одна частица, находящаяся в точке $x \in \mathbf{Z}^d$.

Первый момент $m_1(t,x,y) = \mathsf{E}\mu_{t,x}(y)$ случайной величины $\mu_{t,x}(y)$ является решением $u(t,x)$ задачи Коши

$$\partial_t u = \mathcal{A}u + \mathcal{B}u$$

с начальным условием $u(0,x) = \delta(y-x)$, где симметричный оператор сверточного типа $\mathcal{A}$, порожденный матрицей A, и диагональный оператор покоординатного умножения $\mathcal{B}$ действуют на функцию $\varphi \in L_2(\mathbb{Z}^d)$ следующим образом

$$(\mathcal{A}\varphi)(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} a(x-y)\varphi(y), \quad (\mathcal{B}\varphi)(x) = \beta(x)\varphi(x),$$

для любого $x \in \mathbb{Z}^d$.

Без дополнительных предположений на интенсивности источников ветвления анализ поведения ВСБ с помощью мартингальной техники оказывается затруднительным, и поэтому во всех последующих разделах исследование проведено при выполнении двух ключевых условий. Напомним их

- $$\beta(x) \to 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \to \infty,$$

  где $\|\cdot\|$ — евклидова норма в $L_2(\mathbf{Z}^d)$, а функция $\beta_2(x)$ — ограничена на $\mathbf{Z}^d$.
- $$\lambda_0 = \sup_{\|h\|=1} \{(\mathcal{A} + \mathcal{B})h, h)\} > 0,$$

  гарантирующее экспоненциальный рост по времени математических ожиданий величин $\mu_{x,t}(y)$.

Схема исследования. Мы рассматриваем ВСБ как марковский процесс, принимающий значения в пространстве всех конечных целочисленных мер на $\mathbf{Z}^d$. Затем вводим операторные семейства, порожденные ВСБ. Основной результат — доказательство сходимости в среднеквадратическом $e^{-\lambda_0 t}\mu_{t,x}(y)$ для любого фиксированного $y \in \mathbf{Z}^d$ при $t \to \infty$, основаное на аппроксимации этого процесса неотрицательным мартингалом, см. Смородина и Я. (2022).

Опишем построение мартингала.

Обозначим через $X_x(t)$ ветвящееся случайное блуждание, задаваемое, как и выше, функциями $a(x)$ и $f(u,x)$ и удовлетворяющее условию $X_x(0) = \delta_x$, т.е. в начальный момент у нас имеется ровно одна частица, находящаяся в точке x.

Процесс $X_x(t)$ далее рассматривается как марковский процесс со значениями в пространстве $\mathcal{M}$ всех конечных целочисленных мер на $\mathbf{Z}^d$.

Всякий элемент $M \in \mathcal{M}$ имеет вид $M = \sum_{j=1}^{k} \delta_{y_j}$, где $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$ и $y_j \in \mathbf{Z}^d$.

В этом представлении точки y_j не обязательно различны, что соответствует тому, что в одном узле решетки $\mathbf{Z}^d$ может находиться несколько частиц одновременно, и отличаются находящиеся в одном узле частицы только своими номерами в списке частиц $\{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

Другими словами, каждое y_j соответствует отдельной частице, которую мы кодируем занятым ею узлом решетки y_j и ее номером j в списке.

Так как далее будут рассматриваться только симметрические функции от $X_x(t)$, конкретный выбор нумерации частиц не играет роли.

Для $M \in \mathcal{M}$ символом $\{M\}$ обозначим множество всех частиц. Это множество будем записывать как $\{M\} = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$, причем в этом представлении каждый узел решетки может встречаться несколько раз, что соответствует тому, что в этом узле находится несколько частиц.

Итак, ветвящееся случайное блуждание $X_x(t)$ мы рассматриваем как $\mathcal{M}$-значный марковский случайный процесс.

Через $\mathcal{F}_t$ обозначим соответствующую этому процессу фильтрацию.

Теперь для каждых $t \geqslant 0$, $x \in \mathbf{Z}^d$ и $\varphi \in L_2(\mathbf{Z}^d)$ определим случайную величину $I_{t,x}(\varphi)$, полагая

$$I_{t,x}(\varphi) = \sum_{y \in \{X_x(t)\}} \varphi(y) = \int_{\mathbf{Z}^d} \varphi \, dX_x(t).$$

Далее, мы показываем, что оператор $\mathcal{A} + \mathcal{B}$ является ограниченным и самосопряженным в $L_2(\mathbf{Z}^d)$, а его положительный спектр может состоять только из собственных значений конечной кратности.

Предположим еще, что квадратичная форма оператора $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ принимает положительные значения, то есть

$$\lambda_0 = \sup_{\|h\|=1} \left\{ (\mathcal{A}h, h) + \sum_{x\in\mathbf{Z}^d} \beta(x) h^2(x) \right\} = \sup_{\|h\|=1} \{ ((\mathcal{A}+\mathcal{B})h, h) \} > 0.$$

Выполнение этого условия гарантирует экспоненциальный рост первого момента численностей частиц в каждом узле $\mathbf{Z}^d$.

Из теоремы Крейна-Рутмана (см., напр., Chang et al., 2020) вытекает, что число λ_0 является простым собственным значением оператора $\mathcal{A}$, которому соответствует строго положительная собственная функция $\varphi_0 \in L_2(\mathbf{Z}^d)$.

Теорема

Пусть φ — собственная функция оператора $\mathcal{H} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, соответствующая собственному значению λ. Тогда для любого $x \in \mathbf{Z}^d$ процесс

$$\eta(t,x) = e^{-\lambda t} I_{t,x}(\varphi), \quad \eta(0,x) = \varphi(x),$$

является $\mathcal{F}_t$–мартингалом.

Так как мартингал $\eta(t,x)$ в приведенной теореме неотрицательный, то из теоремы Дуба следует, что п.н. существует предел

$$\eta(\infty,x) = \lim_{t\to\infty} \eta(t,x).$$

Следующая теорема показывает, что этот предел существует также и в среднеквадратическом.

Теорема

Справедливо соотношение $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{Z}^d} \mathsf{E}(\eta(t,x) - \eta(\infty,x))^2 = 0.$

С использованием предыдущих теорем получаем основной результат.

Теорема

Для $\mu_{t,x}(y)$ *имеем* $\lim_{t\to\infty}\sup_{x\in\mathbf{Z}^d}\mathsf{E}\big(e^{-\lambda_0 t}\mu_{t,x}(y)-\varphi_0(y)\eta(x,\infty)\big)^2=0.$

Ослабление условия пространственной однородности случайного блуждания

Основная теорема о поведении численности частиц в точке $\mathbb{Z}^d$ остается верной при нарушении симметрии блуждания в конечном числе точек, которое влечет за собой нарушение пространственной однородности блуждания. Пусть такие источники расположены в точках $x_i \in \mathbf{Z}^d$, $i = 1, \ldots, k$, т. е. $a(x_i, y) \neq a(y, x_i)$ и, как следствие, происходит нарушение симметрии блуждания: $a(x_i, 0) \neq a(0, x_i)$.

В моделях ВСБ с нарушением симметрии в конечном числе источников возникают более сложные возмущения генератора случайного блуждания $\mathcal{A}$ вида

$$\mathcal{Y} = \mathcal{A} + \sum_{i=1}^{k} \zeta_i \mathcal{V}_{x_i} \mathcal{A} + \mathcal{B},$$

где $\{\zeta_i\}$ — вещественные параметры, а $\mathcal{V}_{x_i} := \delta_{x_i} \delta_{x_i}^T$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, — "дельта-операторы", в которых $\delta_x = \delta_x(\cdot)$.

Остальные предположения сохраняются.

Важную роль при исследовании несамосопряженных операторов, возникающих в эволюционных уравнениях для первых моментов численностей частиц, играет теорема о “симметризации”, сводящая задачу к анализу самосопряженных операторов.

Теорема

Пусть параметры $\{\zeta_i\}$ *в представлении оператора* $\mathcal{Y}$ *вещественны и* $\zeta_i > -1$ *при* $i = 1, 2, \ldots, k$. *Тогда в пространстве* $l^2(\mathbf{Z}^d)$ *оператор* $\mathcal{D} = I + \sum_{i=1}^{k} \left(\sqrt{1+\zeta_i} - 1\right) \mathcal{V}_{x_i}$ *является обратимым и самосопряженным, а оператор* $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{Y}\mathcal{D}$ *имеет вид* $\mathcal{D}^{-1}\mathcal{Y}\mathcal{D} = \mathcal{D}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{D} + \mathcal{B}$ *и является самосопряженным.*

Доказательство теоремы повторяет схему доказательства аналогичного утверждения из статьи (Yarovaya, 2013). Для операторов, которые можно свести некоторым преобразованием к самосопряженным, остается верной теорема:

Теорема

Для $\mu_{t,x}(y)$ *имеем* $\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbf{Z}^d} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda_0 t}\mu_{t,x}(y) - \varphi_0(y)\eta(x,\infty)\right)^2 = 0.$

Основное отличие ВСБ по $\mathbb{Z}^d$ в однородной ветвящейся среде от ВСБ **в неоднородной ветвящейся среде**, т.е среде, где генерация частиц происходит либо в выделенном числе точек $\mathbb{Z}^d$, либо в каждой точке $\mathbb{Z}^d$, но с разными интенсивностями воспроизводства частиц, состоит в том, что во втором случае **показатель λ_0 экспоненциального роста численностей частиц зависит не только от интенсивности ветвления $\beta > 0$, но и от параметров блуждания**. Такой эффект наблюдается, например, в ВСБ по $\mathbb{Z}$ с одним источником ветвления частиц.

Пусть $\beta_2 < \infty$ и случайное блуждание задается разностным лапласианом

$$(\varkappa\Delta u)(z) := \varkappa \sum_{|z'-z|=1} (u(z') - u(z)), \quad \varkappa > 0, \quad u \in l^2(\mathbb{Z}).$$

При $\beta > 0$ в явном виде вычисляются собственное значение λ_0 оператора $\mathcal{H} = \varkappa\Delta + \beta\mathcal{V}_0$, где $(\mathcal{V}_0 u)(z) = u(0)\delta_0(z)$, и значения функций Грина $G_{\lambda_0}(0, y)$ и $G_{2\lambda_0}(x, 0)$ через параметры β и $\varkappa$.
Положим $G_{i\lambda_0}(0) := G_{i\lambda_0}(0, 0)$, $G_{i\lambda_0}(x) := G_{i\lambda_0}(x, 0)$, где $i = 1$ или $i = 2$.

Вычислим явный вид функций Грина

Теорема

$G_{\lambda_0}(0) = \frac{1}{\beta}$,

$G_{\lambda_0}(x) = G_{\lambda_0}(0) \cdot \left(\frac{\sqrt{\beta^2+\varkappa^2}-\beta}{\varkappa}\right)^{|x|}$,

$G_{2\lambda_0}(0) = \frac{1}{2\sqrt{\beta^2+\varkappa^2-\varkappa\sqrt{\beta^2+\varkappa^2}}}$,

$G_{2\lambda_0}(x) = G_{2\lambda_0}(0) \cdot \left(\frac{2\sqrt{\beta^2+\varkappa^2}-\varkappa-2\sqrt{\beta^2+\varkappa^2-\varkappa\sqrt{\beta^2+\varkappa^2}}}{\varkappa}\right)^{|x|}$.

Для численности частиц $\mu_{t,x}(y)$ в точке $y \in \mathbb{Z}$ при условии $\mu_{0,x}(y) = \delta(y - x)$ справедлива:

Теорема

Если $\beta > 0$, то

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}^d} \mathsf{E}\left(e^{-\lambda_0 t}\mu_{t,x}(y) - \lambda_0 G_{\lambda_0}(0, y)\xi_x\right)^2 = 0,$$

где

$$\lambda_0 = \sqrt{\beta^2 + \varkappa^2} - \varkappa$$

и ξ_x — невырожденная случайная величина, у которой

$$\mathsf{E}\xi_x = 1, \quad \mathsf{E}\xi_x^2 = \beta_2 \left(\frac{G_{\lambda_0}(0)}{G_{\lambda_0}(x)}\right)^2 \cdot \frac{G_{2\lambda_0}(x)}{(1 - \beta G_{2\lambda_0}(0))}.$$

Однородная ветвящаяся среда

Первый момент $m_1(t,x,y)$ описывается линейным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве:

$$\begin{cases} \frac{\partial m_1(t,x,y)}{\partial t} = (\mathcal{A}m_1)(x)) + (\beta - b_0)m_1(t,x,y) + k, \\ m_1(0,x,y) = \delta(y-x), \end{cases}$$

решение которого находится в явном виде в случае постоянных коэффициентов β, b_0 и k. Рассмотрим вид решения в зависимости от значений k и $\beta - b_0$:

- $k \equiv 0$, $\beta - b_0 \equiv 0$ — задачи Коши для первого момента и для переходных вероятностей совпадут

$$m_1(t,x,y) = p(t,x,y);$$

- $k \equiv 0$, $\beta > b_0 \geq 0$ — количество частиц растет с экспоненциальной скоростью:

$$m_1(t,x,y) = p(t,x,y)e^{(\beta - b_0)t};$$

- $k \equiv 0$, $0 \leq \beta < b_0$ — количество частиц вырождается с экспоненциальной скоростью:

$$m_1(t,x,y) = p(t,x,y)e^{-(b_0-\beta)t}.$$

Однородная ветвящаяся среда с иммиграцией частиц

- $k > 0,\ \beta - b_0 \equiv 0$ — за счет миграции количество частиц растет с линейной скоростью:
$$m_1(t,x,y) = p(t,x,y) + kt;$$
- $k > 0,\ \beta > b_0 \geq 0$ — количество частиц растет с экспоненциальной скоростью, при этом наличие миграции ускоряет рост:
$$m_1(t,x,y) = p(t,x,y)e^{(\beta-b_0)t} + \frac{k}{\beta-b_0}(e^{(\beta-b_0)t} - 1);$$
- $k > 0,\ 0 \leq \beta < b_0$ — в отличие от случая с отсутствием миграции, за счет последнего слагаемого количество частиц не вырождается, а становится стационарным:
$$m_1(t,x,y) = p(t,x,y)e^{-(b_0-\beta)t} + \frac{k}{\beta-b_0}e^{-(b_0-\beta)t} + \frac{k}{b_0-\beta}.$$

Заметим, что в моделях без миграции в однородной среде (при наличии в начальный момент времени только одной частицы) поведение ВСБ оказывается схожим с ветвящимся процессом. Для первых моментов в неоднородной среде такого эффекта наблюдаться не будет.

Литература

- Апарин А.А., Попов Г.А., Яровая Е.Б., *О распределении времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки* Теория вероятностей и ее применения, 2021, том 66, с. 657-675
- Гихман И. И., Скороход А. В., *Введение в теорию случайных процессов*, Наука, М., 1977.
- Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г., *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* Наука, М., 1970,
- Забрейко П. П., Смицких С. В., *Об одной теореме М. Г. Крейна–М. А. Рутмана*, Функц. анализ и его прил., 1979, т. 13, вып. 3, 81–82.
- Смородина Н. В., Яровая Е. Б., *Мартингальный метод исследования ветвящихся случайных блужданий*, УМН, 2022, выпуск 5, 223–224.
- Яровая Е. Б., *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде*, М.: МЦНМО, 2025.
- Яровая Е. Б., *Пространственная структура ветвящихся случайных блужданий*, М.: МЦНМО, 2024.
- Yarovaya, E. B. *Branching Random Walks with Several Sources*, Mathematical Population Studies, 2013, v. 20, p. 14–26.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ