Асимптотические свойства некоторых случайных величин, определяющихся через моменты остановки броуновского движения со сносом

А.А. Муравлев, А.Л. Якымив (МИАН)

Пусть на вероятностном пространстве (Ω, F, P) задано стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t \geq 0}$. Зафиксируем некоторое $\mu \in R$ и рассмотрим броуновское движение со сносом $B^\mu = (B^\mu)_{t \geq 0}$, т. е. $B_t^\mu = \mu t + B_t$. Для $a > 0$ и $b > 0$ введем следующие моменты остановки:

$$\tau_a = \inf\{t \geq 0 : \sup_{s \leq t} B_s^\mu - B_t^\mu = a\},$$

$$\sigma_b = \inf\{t \geq 0 : B_t^\mu - \inf_{s \leq t} B_s^\mu = b\}$$

$$\gamma_{ab} = \min(\tau_a, \sigma_b).$$

Такие моменты остановки были рассмотрены в ряде работ. Соответствующие ссылки даны в кандидатской диссертации первого докладчика

Муравлёв, А. А. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ РАЗЛИЧЕНИЕ ГИПОТЕЗ ДЛЯ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ С РАЗЛАДКОЙ И ФРАКТАЛЬНОГО БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ, 2013

В настоящем докладе рассматриваются задачи нахождения асимптотического поведения при $t \to +\infty$ для вероятностей событий $\{\tau_a > t\}, \{\sigma_b > t\}$ и $\{\gamma_{ab} > t\}$, которые не были предметом изучения в предыдущих работах. Однако, формулы для производящих функций указанных случайных величин являются достаточно громоздкими и сложными для дальнейшего анализа.

Тем не менее, как недавно доказано первым из авторов, их изучение может быть сведено к исследованию трех семейств случайных величин, преобразование Лапласа которых имеет гораздо более простой вид:

$$\mathbf{E}e^{-\lambda X^a} = \frac{a\sqrt{2\lambda}}{sh(a\sqrt{2\lambda})}, \tag{1}$$

$$\mathbf{E}e^{-\lambda Y^{a,y}} = \frac{ash(y\sqrt{2\lambda})}{ysh(a\sqrt{2\lambda})}, \tag{2}$$

$$\mathbf{E}e^{-\lambda Z^{a,z}} = e^{z/a}e^{-z\sqrt{2\lambda}cth(a\sqrt{2\lambda})}, \tag{3}$$

где $a > y > 0, z > 0$.

Теорема 1

Существуют следующие пределы:

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log P\{X_a > t\} = -\frac{\pi^2}{2a^2},$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log P\{Y_{a,y} > t\} = -\frac{\pi^2}{2a^2},$$

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log P\{Z_{a,z} > t\} = -\frac{\pi^2}{2a^2}. \qquad (4)$$

Доказательство теоремы 1

Докажем первое из равенств (4) при $a = 1/\sqrt{2}$.

Мы имеем:

$$\frac{sh(\sqrt{\lambda})}{\sqrt{\lambda}} = \frac{e^{\sqrt{\lambda}} - e^{-\sqrt{\lambda}}}{2\sqrt{\lambda}} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(\left(1 + \frac{\sqrt{\lambda}}{1!} + \frac{\lambda}{2!} + \dots\right) - \left(1 - \frac{\sqrt{\lambda}}{1!} + \frac{\lambda}{2!} - \dots\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left(2\frac{\sqrt{\lambda}}{1!} + 2\frac{\sqrt{\lambda}^3}{3!} + 2\dots\frac{\sqrt{\lambda}^{(2n+1)}}{(2n+1)!} + \dots\right)$$

$$= \frac{1}{1!} + \frac{\lambda}{3!} + \dots\frac{\lambda^n}{(2n+1)!} + \dots \stackrel{def}{=} f(\lambda). \qquad (5)$$

Определённая при $\lambda \geq 0$ в последнем соотношении функция $f(\lambda)$ аналитически продолжается на всю комплексную плоскость, т.е., является целой функцией. Отсюда следует, что функция

$$F(\lambda) = \mathbb{E}e^{-\lambda X^1} = \frac{1}{f(\lambda)} \qquad (6)$$

аналитически продолжается на правую полуплоскость $Re\lambda > -c$, где $-c < 0$ есть наибольший корень уравнения $f(-c) = 0$.

Найдём этот корень. Согласно (1) и (6), мы имеем:

$$0 = f(-c) = sh(\sqrt{-c}) = sh(i\sqrt{c})$$

$$= \frac{e^{i\sqrt{c}} - e^{-i\sqrt{c}}}{2} = i \sin(\sqrt{c}),$$

откуда получаем, что $\sqrt{c} = \pi$ или

$$c = \pi^2.$$

При $\tau \in C, \ \tau \to 0$ имеем:

$$\sqrt{\tau - \pi^2} = i\pi(1 - \tau/\pi^2)^{1/2} = i\pi(1 - \tau/2\pi^2 + o(\tau)),$$

Отсюда

$$sh(\sqrt{\tau - \pi^2}) = sh(i\pi(1-\tau/\pi^2)^{1/2}) = i\,\sin(\pi(1-\tau/\pi^2)^{1/2})$$

$$= i\,\sin(\pi-\tau/2\pi+o(\tau)) = i\,\sin(\tau/2\pi+o(\tau)) \sim i\tau/2\pi.$$

Поэтому

$$F(\tau - c) = \frac{\sqrt{\tau - \pi^2}}{sh(\sqrt{\tau - \pi^2})} \sim \frac{i\pi}{i\tau/2\pi} = 2\pi^2\tau^{-1}.$$

Таким образом, у функции $F(\lambda)$ имеется полюс первого порядка в точке $\lambda = -\pi^2$.

Лемма 1 (K. Nakagawa, 2007, теорема 2)

Пусть W есть неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа

$$G(\lambda) = \mathbf{E} \exp(-\lambda W)$$

и точка $\lambda = -\sigma \in (-\infty, 0)$ есть абсцисса его сходимости. Если эта точка является полюсом, то

$$\frac{1}{t} \log \mathbf{P}\{W > t\} \to -\sigma$$

при $t \to +\infty$.

Стало быть, согласно лемме 1, при $u \to +\infty$ имеет место соотношение

$$\log P\{X_1 > u\} \sim -u\pi^2.$$

Поэтому

$$\log P\{X_a > t\} = \log P\{2a^2 X_1 > t\}$$

$$= \log P\{X_1 > t/2a^2\} \sim -t\frac{\pi^2}{2a^2}.$$

при $t \to +\infty$. Первое из равенств (4) доказано.

Проверим теперь выполнение второго из этих равенств. Из (2) получаем:

$$\mathbf{E}e^{-\lambda Y^{a,y}} = \frac{ash(y\sqrt{2\lambda})}{ysh(a\sqrt{2\lambda})}$$

$$= \frac{sh(y\sqrt{2\lambda})}{y\sqrt{2\lambda}} \frac{a\sqrt{2\lambda}}{sh(a\sqrt{2\lambda})} = \frac{f(2y^2\lambda)}{f(2a^2\lambda)} \qquad (7)$$

согласно соотношению (5). При этом и числитель, и знаменатель последней дроби аналитически продлжаются на всю комплексную плоскость.

Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к выводу, что преобразование Лапласа с.в. $Y^{a,y}$ аналитически продолжается на правую полуплоскость $Re\lambda > -c_1$, где $-c_1 < 0$ есть наибольший корень уравнения $f(-2a^2c_1) = 0$, равный $-\pi^2/2a^2$. При этом в точке $\lambda = -c_1 = -\pi^2/2a^2$ у этого преобразования Лапласа имеется полюс первого порядка, так как числитель последней дроби в (7) в этой точке положителен в силу того, что $y \in (0, a)$. Поэтому, для доказательства второго из равенств (4) нам остаётся применить к с.в. $Y^{a,y}$ лемму 1.

Далее, полагая в (3) $\lambda = \tau - c_1 = \tau - \pi^2/2a^2$, получаем при $\tau \downarrow 0$

$$\log \mathbf{E} e^{-\lambda Z^{a,z}} = \frac{z}{a} - z\sqrt{2\lambda}\frac{ch(a\sqrt{2\lambda})}{sh(a\sqrt{2\lambda})}$$

$$\sim -z\sqrt{-\pi^2/a^2}\frac{ch(a\sqrt{-\pi^2/a^2})}{sh(a\sqrt{-\pi^2/a^2+2\tau})} = iz\frac{\pi}{a}\frac{ch(i\pi)}{sh(\sqrt{-\pi^2+2a^2\tau})}$$

$$= -iz\frac{\pi}{a}\frac{1}{sh(i\pi\sqrt{1-2\tau a^2/\pi^2})} = -z\frac{\pi}{a}\frac{1}{\sin(\pi\sqrt{1-2\tau a^2/\pi^2})}$$

$$= -z\frac{\pi}{a}\frac{1}{\sin(\pi(1-\tau a^2/\pi^2+O(\tau^2)))} = -z\frac{\pi}{a}\frac{1}{\sin(\tau a^2/\pi+O(\tau^2))}$$

$$\sim -z\frac{\pi}{a}\frac{1}{\tau a^2/\pi} = -z\frac{\pi^2}{\tau a^3}.$$

Таким образом,

$$\tau \log \mathbf{E} e^{-\lambda Z^{a,z}} \to -z \frac{\pi^2}{a^3} \tag{8}$$

при $\tau \downarrow 0$.

Лемма 2 (Benaim, S; Friz, P., 2008, критерий 2)

Пусть W есть неотрицательная случайная величина с преобразованием Лапласа

$$G(\lambda) = \mathbf{E}\,\mathsf{exp}(-\lambda W)$$

и точка $\lambda = -\sigma \in (-\infty, 0)$ есть абсцисса его сходимости. Если $G(-\sigma + \tau) = \tau^{-\varrho} L(\tau)$ для некоторого $\varrho > 0$ и медленно меняющейся в нуле функции $L(\cdot)$, то

$$\frac{1}{t} \log \mathbf{P}\{W > t\} \to -\sigma$$

при $t \to +\infty$.

Используя лемму 2, с учётом соотношения (8), убеждаемся в справедливости последнего равенства в (4). Теорема доказана.

Спасибо за внимание!