X Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-10)
31.05.–6.06.2025, пос. Дивноморское

Случайное блуждание счётного числа частиц в полосе с накоплением на границе

Замятин Андрей Андреевич[1]
Меликян Маргарита Врежовна[1,2]
Новак Михаил Владимирович[1]

(1) МГУ им. М.В.Ломоносова
(2) МФТИ

Введение

1. Замятин А.А., Малышев В.А. Накопление на границе для одномерной стохастической системы частиц// Проблемы передачи информации. 2007. Т. 43, выпуск 4. С. 68-82.

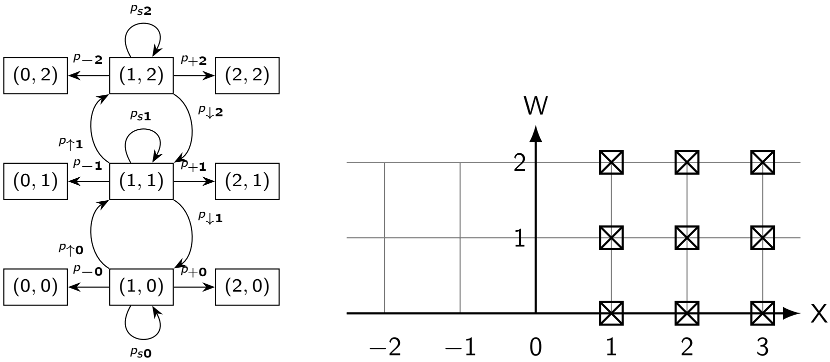
2. Malyshev V.A. Stochastic growth models without classical branching processes// Markov Processes and related fields. 2022. V. 28. P. 179-184.

Задача была предложена В.А.Малышевым в этой статье для блуждания по $\mathbb{Z}$ *как модель роста. В настоящей работе рассматривается обобщение задачи на случай полосы.*

3. Гусаров А.С. Модель накопления частиц в нуле при блуждании по целочисленным точкам полупрямой// Вестник Московского университета. Серия 1. Математика, механика (подана)

Модель

Рассмотрим полосу $\mathbb{Z} \times \{0, \ldots, N-1\}$. В момент времени $t = 0$ в каждом узле правее границы $0 \times \{0, \ldots, N-1\}$ находится одна частица, которая начинает оттуда своё случайное блуждание по полосе (переходные вероятности см. на рисунке ниже).
Обозначим в момент времени t координату частицы, начавшей блуждание из положения (x, k), через $(\eta^X_{(x,k)}(t), \eta^W_{(x,k)}(t))$:



(a) Переходные вероятности при N=3.

(b) Начальное положение частиц в модели для $N = 3$.

Модель

Введём случайный процесс $n(t)$ следующим образом:

$$n(t) = \sum_{\substack{(x,k):\, x\in\mathbb{N},\\ k\in\{0,\ldots,N-1\}}} \mathbb{1}\Big(\min_{\tau\le t} \eta^{X}_{(x,k)}(\tau) \le 0\Big) \tag{1}$$

Если рассмотреть процесс с поглощением на границе $0 \times \{0, \ldots, N-1\}$, то $n(t)$ есть число поглощенных к моменту времени t точек, но для дальнейших выкладок удобно считать, что частицы продолжают свое движение, а мы просто зафиксировали сам факт прохождения этой частицы через границу (единожды за всё время наблюдения).

Наша цель состоит в нахождении асимптотики $En(t)$.

Определим марковскую цепь W, управляющую вертикальной координатой частицы:

$$\begin{gathered} P(W(t)=k+1|W(t-1)=k)=p_{\uparrow k}, \\ P(W(t)=k-1|W(t-1)=k)=p_{\downarrow k} \\ P(W(t)=k|W(t-1)=k)=1-p_{\downarrow k}-p_{\uparrow k}= \\ =p_{+k}+p_{-k}+p_{sk}=\tilde{p_k} \end{gathered} \tag{2}$$

Далее предполагаем, что цепь W неприводимая и апериодичная, то есть эргодическая. Стационарное распределение цепи W обозначим за π. Тогда верна:

Теорема

Пусть

$$d = \sum_{k \in \{0,\ldots,N-1\}} \pi(k) \left(p_k^+ - p_k^-\right).$$

(Средневзвешенный снос). Тогда:

1. при $d < 0$:
$$\frac{n(t)}{t} \xrightarrow{P} -Nd$$
2. при $d > 0$ существует константа $C > 0$, такая что
$$E(n(t)) \leq C, \quad \forall t \geq 0$$
3. при $d = 0$:
$$\lim_{t \to \infty} \frac{E(n(t))}{\sqrt{t}} = N\sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ , \text{ где } \sigma^2 = \sum_k \pi(k) \left(p_k^+ + p_k^-\right)$$

Идея доказательства

Рассмотрим задачу накопления для $\mathbb{Z}$ при меняющемся распределении скачков. В момент $t = 0$ в каждом узле $x > 0$ расположены частицы. Для частицы с начальным положением x введем стационарную цепь $W_x(t)$, отвечающую за переключение распределения скачков. Введем $x + \xi_x(t)$ – координату частицы в момент t следующим образом:

$$\xi_x(t) - \xi_x(t-1) = \begin{cases} 0, \text{если } W_x(t) \neq W_x(t-1) \\ u_{x,k}(t), \text{если } W_x(t) = W_x(t-1) = k \end{cases}, \ \xi_x(0) = 0 \tag{3}$$

где

$$u_{x,k}(t) = \begin{cases} 1, \text{с вер. } \frac{p_{+k}}{\tilde{p}} \\ 0, \text{с вер. } \frac{p_{sk}}{\tilde{p}} \\ -1, \text{с вер. } \frac{p_{-k}}{\tilde{p}} \end{cases}$$

Пара $(W_x(t), \xi_x(t))$ является марковским процессом с теми же переходными вероятностями, что и изначальная цепь для полосы. Введем для такого блуждания процесс накопления $\widetilde{n}(t)$:

$$\widetilde{n}(t) = \sum_{x \in \mathbb{N}} \mathbb{1}(\min_{\tau \leq t}(x + \xi_x(t)) \leq 0) \tag{4}$$

Идея доказательства

Утверждение 1

Средние процессов $n(t)$ и $\widetilde{n}(t)$ связаны соотношением $N \cdot E\widetilde{n}(t) = En(t)$.

Относительные движения частиц $\xi_x(t)$ распределены одинаково, тогда можно опустить индекс x.

Утверждение 2

Для процесса $\widetilde{n}(t)$ выполнено:

$$E\widetilde{n}(t) = -E \min_{\tau \leq t} \xi(\tau)$$

Поскольку последовательность $e_t = \xi(t) - \xi(t-1)$ регулируется эргодической стационарной марковской цепью W, она сама является стационарной и обладает свойством экспоненциального перемешивания.

Идея доказательства

Введем средневзвешенный снос:

$$d = Ee_1 = \sum_{k \in \{0,\ldots,N-1\}} \pi(k) \left(p_k^+ - p_k^-\right) \tag{5}$$

Теорема

Для введенных выше процесса $\xi(t)$ и d выполнено:

$$-E \min_{\tau \le t}(\xi(\tau) - \tau d)/\sqrt{t} \to \sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

где $\sigma^2 = E(e_1 - d)^2$.

Утверждение следует из теоремы Донскера для стационарных последовательностей с перемешиванием (Billingsley, Theorem 19.2, стр.200).

Идея доказательства

В силу теоремы 2 и утверждения 2 следует:

Теорема

Для введенных выше процесса $\widetilde{n}(t)$ и средневзвешенного сноса d выполнено:

При $d < 0$:

$$\frac{\widetilde{n}(t)}{t} \xrightarrow{P} -d$$

При $d > 0$ существует константа C, такая что

$$E(\widetilde{n}(t)) \leq C$$

При $d = 0$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(\widetilde{n}(t))}{\sqrt{t}} = \sigma\sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

где

$$\sigma^2 = \sum_k \pi(k)\left(p_k^+ + p_k^-\right)$$

Сходимость по вероятности следует из закона больших чисел для схемы серий (Боровков, Теорема 3, стр. 157).

Спасибо за внимание!