

Маркированные марковские процессы и их применения

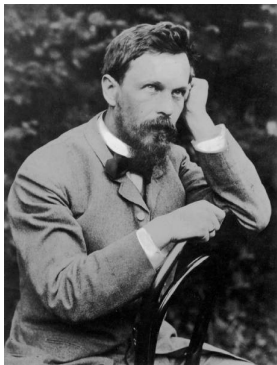
Vladimir Rykov

МКСМ — 2025

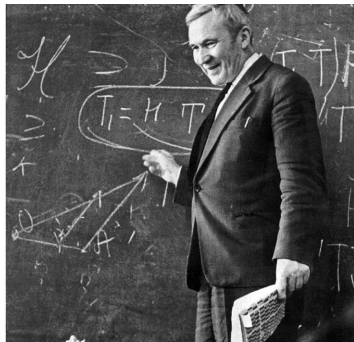
Доклад подготовлен по материалам совместной с Е.Морозовым и Н.Ивановой статьи, представленной в журнал RTA (Gnedenko Forum)

Введение I

Со времени А.А. Маркова основным аппаратом изучения стохастических систем стали марковские процессы, обобщение и развитие которых продолжается до наших дней. Огромный вклад в развитие теории марковских процессов, как и вообще всей теории случайных процессов, внёс А.Н. Колмогоров, который предложил также понятие процессов с дискретным вмешательством случая.



А.А. Марков 1856 - 1922



А.Н. Колмогоров 1903 - 1987

Развитие марковских процессов привело к различным их обобщениям:

- метод введения дополнительной переменной (Д. Кокс-1955),



D. Cox (1955). The analysis of non-Markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 51(3): 433–441.

- линейчатые (Ю.К. Беляев - 1962)



Y. K. Belyaev, “Linear Markov processes and their applications to reliability problems”, in *Proceedings of the VI All-Unuon Workshop on Probab. Theory and Math. Stat., Vilnius, Lithuania, (1962)*, pp.309–323.

- кусочно-линейные (И.Н. Коваленко - 1976) марковские процессы.









Kovalenko, I.N.: *Investigations on Analysis of Complex Systems Reliability*, p. 210. Naukova Dumka, Kiev (1976).




- Статья Цинлара дала толчок развитию ПМП



E. Cinlar (1969). On semi-Markov processes on arbitrary space. *Proc. Camb. Philos., Math. Proc. Camb. Philos. Soc.*, 1969 , 66, 381-392.

- Введённое Смитом в 1955г. понятие регенерации получило широкое распространение при исследовании прикладных стохастических моделей,
 Smith W. Regenerative stochastic processes Proc. of Royal Soc., Ser. A, The Royal society Publ. 1955. V. 232. P. 6–31.
- её объединение с понятием марковской зависимости привело к созданию теории полурегенерирующих и разложимых полурегенерирующих процессов,
 V. Rykov (2010) Decomposable semi-regenerative processes and their applications. LAMPERT Academic Publishing, 2010, 75pp.
- Ренеративная структура моделей наряду с имитационным моделированием широко используется и в настоящее время для исследования сложных систем
 S.Asmussen, P. Glynn. Stochastic Simulation. Algorithms and Analysis. Stochastic Modelling and Applied Probability. 57. Springer 2007., 476p.

- Большинство перечисленных процессов являются процессами с дискретным вмешательством случая (ПДВС), впервые упомянутые, по-видимому, Колмогоровым, см. также
 -  А. Н. Ширяев "Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели ФАЗИС, Москва 1998
 -  Ю.А.РОЗАНОВ "ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ Наука, 1982
- В.С. Корольук, И.И. Ежов и др.
- Для моделирования широкого класса систем западными специалистами используется понятие систем дискретных событий (Discrete Events System – DES Modelling)
 -  P. Haas (2002) Stochastic Petry Nets: Modelling, Stability, Simulation. Springer Series in Operation Research. Springer 2002. 509p.
- и их мат. мод. — обобщённые полумарковские процессы (GSMP),

-  Glynn P. W. A GSMP formalism for discrete event systems // Proceedings of the IEEE. 1989. No. 1. Vol. 77. Pp. 14-23. DOI: 10.1109/5.21067
-  Glynn Peter W. and Haas, Peter J.(2006). Laws of Large Numbers and Functional Central Limit Theorems for Generalized Semi-Markov Processes, // Stochastic Models, 22: 2, 201 — 231.
-  PETER W. GLYNN, PETER J. HAAS (2015). On Transience and Recurrence in Irreducible Finite-State Stochastic Systems. // ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation, Vol. 25, No. 4, Article 25, Publication date: May 2015

Б.А. Севастьянов впервые доказал нечувствительность стац. вер. сост. системы Эрланга к виду распределения времени обслуживания.



Севастьянов Б. А. Эргодическая теорема для марковских процессов и её приложение к телефонным системам с отказами // Теория вероятностей и её применение. — 1957. — т. 2, № 1. — с. 106—116.

В работах Б.В. Гнеденко и А.Д. Соловьёва установлена сходимость распределения времени безотк. работы дублированной системы к показательному при "быстром восстановлении" для любых распред. в.б.р. и ремонта её элементов,



Гнеденко Б. В. О ненагруженном дублировании // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 4. — с. 3—12.



Гнеденко Б. В. О дублировании с восстановлением // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 5. — с. 111—118.



Соловьёв А. Д. Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента // Изв. АН СССР. Тех. кибернетика. — 1964. — № 5. — с. 119—121.

В нескольких наших исследованиях мы расширили эти результаты.



Rykov, V. V. and Kozyrev, D. V. Analysis of Renewable Reliability Systems by Markovization Method. // In: "Analytical and Computational Methods in Probability Theory", eds: Rykov, V. V., Singpurwalla, N.D., and Zubkov, A.M., Springer International Publishing, Cham, 2017, pp 210–220



Rykov V., Zaripova E., Ivanova N., and Shorgin S. On Sensitivity Analysis of Steady State Probabilities of Double Redundant Renewable System with Marshall-Olkin Failure Model. // In: Distributed Computer and Communication Networks, eds by Vishnevskiy, V. M. and Kozyrev, D. V. Springer International Publishing, Cham, 2018, pp. 234–245.



Rykov, V. On Reliability of Renewable Systems. // In: Reliability Engineering. CRC Press, 2018, pp. 173-196/



Rykov, V. V. and Ivanova, N. M. and Kozyrev, D. V. "Sensitivity Analysis of a k-out-of-n:F System Characteristics to Shapes of Input Distribution //In: "Distributed Computer and Communication Networks eds by Vishnevskiy, V. M., and Samouylov, K. E. and Kozyrev, D. V. "Springer International Publishing Cham, 2020, pp. 485–496.


Анализ чувствительности выходных характеристик стохастических систем к виду распределений и параметров исходной информации является важным аспектом их исследования, и в нашем исследовании этому направлению также уделено значительное внимание.

О символике Кендалла-Башарина и её модификации

Со времени введения символики Кендалла

 Kendall, D. G. "Stochastic Processes Occurring in the Theory of Queues and Their Analysis by the Method of Embedded Markov Chains 1953, "Annals of Math. Stat. V.24, pp. 338-354

и её модификации Башариным (стр. 56)

 Башарин Г. П., Харкевич А. Д., Шнепс М. А. Массовое обслуживание в телефонии М.: Наука, 1968, 247 с.

прошло много времени и в учебном пособии

 В.В. Рыков, Д.В. Козырев. Основы теории массового обслуживания. "ИНФРА-М", 2016, 223с.

была предложена новая модификация, охватывающая не только СМО.

О символике Кендалла-Башарина и её модификации

Многие реальные системы, такие как СМО (включая ресурсные), системы надёжности, запасов, системы передачи и обработки информации, страховые, финансовые и др. системы можно представить в виде набора 4-х элементов:

- входящего потока (α),
- механизма обслуживания (β),
- структуры ($\gamma : m, n$) и
- дисциплины обслуживания (δ).

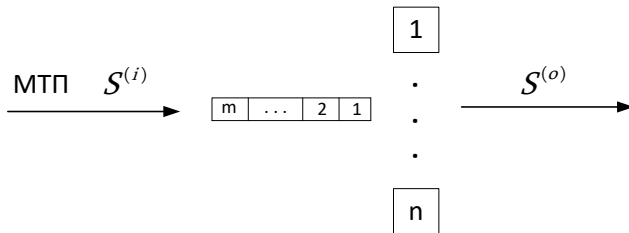
Такие системы целесообразно представлять в виде: $(\alpha, | \beta, | \gamma, | \delta)$.

Символы α и β принимают значения как в символике Кендалла, символ γ указывает на структурные параметры системы: m —число мест для ожидания, n —число обслуживающих приборов, символ δ служит для указания дисциплины обслуживания и для прямого порядка обслуживания опускается.

Для указания открытой системы используются круглые “()”, а замкнутой системы — угловые скобки “<>”.

На примере СМО такая модель представлена на рис.

Модель СМО с общим входящим потоком



СМО с входящим МТП

Кроме элементов модели необходимо указать набор исследуемых характеристик системы (очереди, задержек, отказов, объёмов запасов, капитала компании и т.п.).

Концепция ПДВС -I

На вход поступает МТП $S^{(i)} = \{(S^{(i)}(n), B^{(i)}), n = 0, 1, 2, \dots\}$, который преобразуется выходной $S^{(o)} = \{S^{(o)}(n), B^{(o)}(n), n = 0, 1, 2, \dots\}$. Наложение этих потоков событий позволяет построить поток дискретных моментов изменения состояний системы

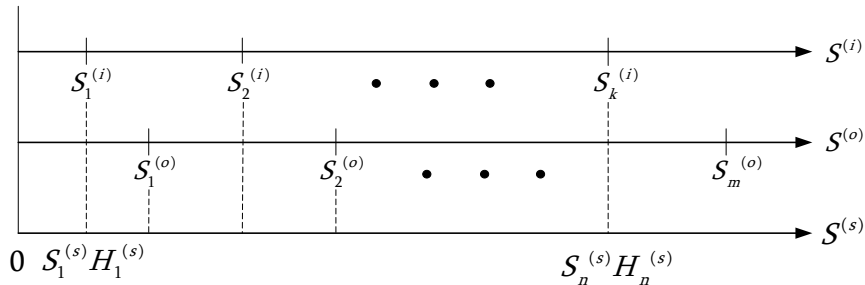


Рис.: Последовательность моментов вмешательства случаев

Для построения ПДВС обозначим через $J(n)$ процесс изменения основных состояний системы в моменты $S^{(s)}(n)$ с множеством состояний \mathcal{J} и через $\mathbf{V}(n) = (\mathbf{V}_j(n) : j \in \mathcal{J}, n = 1, 2, \dots)$ метки, которые обеспечивают вычисление необходимых характеристик модели. Тогда под ПДВС будем понимать последовательность

$$Z(n) = \{(J(n), \mathbf{V}(n)), t = 0.1, \dots\},$$

где изменения состояний и меток задаются операторами

$$J(n+1) = \Phi[J(n), \mathbf{V}(n)], \quad \mathbf{V}(n+1) = \Psi[J(n), \mathbf{V}(n)]$$

и зависят от конкретного процесса и определяются его характеристиками.

Рассмотрим более подробное описание ПДВС на примере ММП, который характеризуется рекуррентным входящим потоком с н.о.р. интервалами между моментами вмешательства случая.

Маркированный марковский процесс (ММП)

Специальным случаем ПДВС является введённое в



Рыков В., Иванова Н. О надёжности восстанавливаемой дублированной системы с произвольными распределениями времени безотказной работы и восстановления её элементов // Материалы XXII-й Международной конференции имени А. Ф. Терпугова. Томск: Томский государственный университет. 2023. С. 335-340.

понятие ММП, который является весьма общей его математической моделью и оказалось весьма успешным для исследования различных достаточно сложных стохастических систем.

В частности было использовано для исследования весьма общих моделей систем надёжности *k-out-of-n* с рекуррентными потоками отказов и восстановлений.

Под **ММП** будем понимать МП с дискретным параметром

$$Z(t) = \{(J(t), \mathbf{V}(t)), t = 0.1, \dots\},$$

по моментам времени $S(t)$ вмешательства случая,

$$S(t) = S(t-1) + T_{J(t)}(t),$$

где

- $T_{J(t)}(t)$ – интервал между моментами вмешательства случая, который вычисляется с помощью меток для конкретных моделей,
- $J(t)$ – состояния системы с множеством \mathcal{J} , $|\mathcal{J}| \leq \infty$,
- $\mathbf{V}(t)$ – набор случайных меток $\mathbf{V}(t) = \{\mathbf{V}_j(t) : j \in \mathcal{J}\}$, дополняющих процесс Z до марковского, которые принимают значения в измеримых пространствах (E_j, \mathcal{E}_j) .

Такой процесс задаётся:

- переходными вероятностями $p_{ij}(\mathbf{V}_i) = \mathbf{P}\{J(t+1) = j | J(t) = i, \mathbf{V}_i(t)\}$,
- операторами преобразования меток $\Phi_{ij}(\mathbf{V}_i)$ и
- набором последовательностей н.о.р. с.в. $\xi_t, \eta_t, (t = 1, 2, \dots)$ и их распределениями.

С.в. $\xi_t, \eta_t, (t = 1, 2, \dots)$ определяют исходную информацию о модели и задают основное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, на котором определяются все остальные компоненты процесса.

Настоящее сообщение предназначено для демонстрации работоспособности методов ММП на двух примерах:




- СМО $(GI|GI|n, m)$
- и системы надёжности $< GI_{k \leq n} | GI | I >$.

При этом основное внимание уделяется

- разработке методов и процедур вычисления основных характеристик моделей,
- исследованию их свойств, таких как чувствительность к виду исходных распределений и их параметров.

О системе $(GI|GI|n, m)$

Исследованию классической системы $(GI|GI|n, m)$ посвящены многочисленные работы, в том числе монография Козна [1] и публикации автора доклада [2], [3].

-  J.W. Cohen. The Single Server Queue (2nd ed.) // North-Holland, 1982.
-  В.В. Рыков. Исследование системы $GI/GI/1$ методом разложимых регенерирующих процессов I. // Изв. АН СССР, 1983, № 6, стр. 13-20.
-  В.В. Рыков. Исследование системы $GI/GI/1$ методом разложимых регенерирующих процессов II. // Изв. САН СССР 1984, № 1, стр. 126-132.

Однако основное внимание в этих исследованиях уделено изучению условий существования стационарного режима работы системы $(GI|GI|1)$, в то время как настоящее исследование посвящено, как сказано выше, численным методам исследования такой системы в наиболее общих условиях.

Описание системы. Обозначения и предположения

Рассмотрим СМО, $(GI|GI|n, m)$. Обозначим через

$A_i, B_i (i = 1, 2, \dots)$ интервалы между моментами поступления требований в систему и длительности их обслуживания, (н.о.р. с.в.);

$$A(s) = \mathbf{P}\{A_i \leq s\}, \quad B(s) = \mathbf{P}\{B_i \leq s\},$$

$$a(s) = A'(s), \quad b(s) = B'(s),$$

$$\mu_A = \mathbf{E}[A_i], \quad \mu_B = \mathbf{E}[B_i].$$

Предполагается существование необходимого количества их моментов.

В дальнейшем с.в. обозначаются заглавными латинскими буквами X, Y, \dots , а их значения — малыми x, y, \dots , многомерные (векторные) с.в. и их значения —соответствующими полужирными буквами.

ММП для системы $(GI|GI|n, m) - I$

В качестве мат. модели системы $(GI|GI|n, m)$ рассмотрим ММП

$$Z(t) = \{(J(t), \mathbf{V}(t)), t = 0, 1, \dots\}, \quad (1)$$

где $J(t)$ – это её состояния с множеством $\mathcal{J} = (0, 1, \dots, n + m)$.

Метки $\mathbf{V}_j(t) = (X_j(t), \mathbf{Y}_j(t))$ процесса в состоянии j на шаге t – это:

- остаточное время до момента поступления очередного требования $X_j(t)$ и
- набор остаточных длительностей обслуживания

$$\mathbf{Y}_j(t) = (Y_j^{(1)}(t), \dots, Y_j^{(j \wedge n)}(t)),$$

расположенных в порядке возрастания, где верхний индекс указывает порядковый номер метки, нижний — номер состояния системы, переменная в скобках – это номер шага.

ММП для системы $(GI|GI|n, m) - II$

Моменты $S(t)$ $t = 0, 1, \dots$ изменения состояний системы имеют вид

$$S(t) = S(t-1) + T_{J(t)}(t), \quad t = 0, 1, \dots, \quad S_0 = 0, \quad (2)$$

где интервалы между ними равны (в состоянии $J(t) = 0$ следует положить $Y_0^{(0)}(t) = \infty$.)

$$T_{J(t)}(t) = \min[X_{J(t)}(t), Y_{J(t)}^{(1)}(t)]. \quad (3)$$

Предполагая, что начальным состоянием является поступление требования в свободную систему, когда начинаются интервал до поступления очередного требования и новое обслуживание, имеем

$$J(0) = 1, \quad X_0(0) = A_0, \quad Y_0^{(1)}(0) = B_0.$$

Важно отметить, что моменты поступления в систему нового требования после её освобождения являются моментами регенерации системы и процесса Z .

ММП для системы $(GI|GI|n, m)$ - III

Вероятности переходов на каждом шаге зависят от содержания меток на этом шаге, но от номера шага явно не зависят и равны

$$\begin{aligned} p_j(\mathbf{V}_j) &= \mathbf{P}\{J(t+1) = j+1 \mid J(t) = j\} = \mathbf{P}\{X_j(t) \leq Y_j^{(1)}(t)\}, \\ q_j(\mathbf{V}_j) &= \mathbf{P}\{J(t+1) = j-1 \mid J(t) = j\} = \mathbf{P}\{X_j(t) > Y_j^{(1)}(t)\}, \end{aligned} \quad (4)$$

а соответствующие переходы основной последовательности $J(t)$ представлены на графе, где $p_j = p_j(\mathbf{V}_j)$, $q_j = q_j(\mathbf{V}_j)$

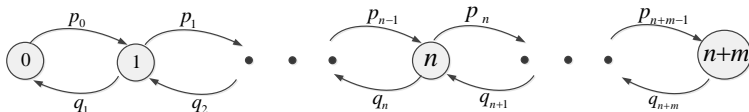


Рис.: Граф переходов компоненты $J(t)$

Исследование модели в непрерывном времени I

Используя соотношения (2, 3) можно рассчитать все основные ВВХ модели. Обозначим через $N(s)$ счётчик числа изменения состояний системы (вмешательства случаев) за календарное время s ,

$$N(s) = \min\{t : S(t) \leq s\}.$$

Тогда процесс числа требований в системе $L(s)$ в непрерывном времени s представляется через компоненту $J(t)$ последовательности $Z(t)$ в виде

$$L(s) = J(N(s)) \tag{5}$$

и представлен в виде непрерывных справа траекторий на рисунке 3, где также показаны первые период регенерации R_1 и момент регенерации $\tau_1 = S(4)$.

Исследование модели в непрерывном времени II

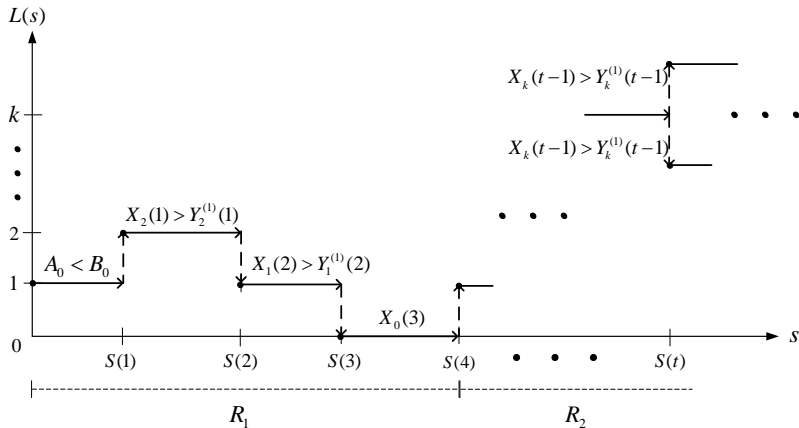


Рис.: Траектория процесса $L(s)$ в непрерывном времени

Исследование модели в непрерывном времени III

Определим последовательные (дискретные) моменты регенерации (перехода $1 \rightarrow 0$) τ_n :

$$\tau_{n+1} = \min\{t + 1 : t > \tau_n : J(t) = 0, J(t + 1) = 1\}, \quad \tau_0 = 0.$$

Тогда продолжительность n -ого периода регенерации R_n равна

$$R_n = S(\tau_n) - S(\tau_{n-1}) = \sum_{\tau_{n-1} < t \leq \tau_n} T_t(J(t)) = \sum_{\tau_{n-1} < t \leq \tau_n} \min[X_{J(t)}, Y_{J(t)}^{(1)}], \quad (6)$$

то есть распределение $F_R(t) = \mathbf{P}\{R \leq t\}$ и его моменты $m_R^{(i)} = \mathbf{E}[R^i]$ определяются метками процесса Z . При этом длительности периодов занятости Π_n равны

$$\Pi_n = \sum_{\tau_{n-1} < t \leq \tau_n - 1} T_{J(t)}(t) = R_n - T_{\tau_{n-1}}(\tau_n - 1). \quad (7)$$

и также выражается в терминах меток.

Исследование модели в непрерывном времени IV

Стационарные вероятности состояний π_j в терминах меток равны:

$$\begin{aligned}\pi_j &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \int_0^s 1_{\{L(u)=j\}} du = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{s} \left[\sum_{k=1}^{K(s)} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} 1_{\{J(N(u))=j\}} du + \int_{\tau_{K(s)}}^s 1_{\{J(N(u))=j\}} du \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{K(s)}{s} \frac{1}{K(s)} \sum_{k=1}^{K(s)} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} 1_{\{J(N(u))=j\}} du = \\ &= \frac{1}{\mu_R} \mathbf{E} \left[\sum_{t=1}^{\tau_1} T_{J(t)}(t) 1_{\{J(t)=j\}} \right],\end{aligned}\tag{8}$$

где $\mu_R = \mathbf{E}[R]$ — средняя продолжительность периода регенерации и $K(s) = \min\{k : S(\tau_k) \leq s\}$ — счетчик количества регенераций до момента времени s .

Условие существования стационарного режима

Для использования регенеративной структуры последовательности Z необходимо проверить условия ее положительной возвратности.

Заметим, что положительная возвратность последовательности $\{Z(t), t \geq 0\}$, и следовательно существование её (и системы) стационарного режима обеспечивается конечностью числа шагов до регенерации $\mathbf{E}[\tau] < \infty$.

В свою очередь, условие $\mathbf{E}[\tau] < \infty$ в случае рассматриваемой (конечной при $m + n < \infty$) системы обеспечивается следующим простым и легко проверяемым условием на заданные исходные элементы системы (требования с положительной вероятностью обслуживаются быстрее, чем поступают):

$$\mathbf{P}\{A > B\} = \int_0^\infty B(x)A(dx) > 0. \quad (9)$$

Remark

Для существования стационарного режима при $m = \infty$ дополнительно к (9) необходимо наложить условие отрицательного сноса

$$\rho := \frac{b}{na} < 1.$$

В случае системы с неограниченным числом устройств, т.е., при $n = \infty$, условие (9) обеспечивает стационарность в предположении, что выполнены очевидные требования $\mu_A < \infty$, $\mu_B < \infty$.

Заметим, что условие (9) не является избыточным, так как в противном случае, в системе отсутствуют (классические) регенерации.

Remark

Заметим, что процесс незавершенной в состоянии $J(t)$ работы,

$$W_{J(t)}(t) = \sum_{1 \leq i \leq J(t) \wedge n} Y_j^{(i)} + \sum_{1 \leq i \leq [J(t) - n]^+} B_i,$$

также регенерирует в момент поступления нового требования в пустую систему.

Постановка задачи

Исследуются основные ВВХ системы $(G|G|n, m)$:

- период регенерации R , его распределение $F_R(s) = \mathbf{P}\{R \leq s\}$ и моменты $m_k(R) = \mathbf{E}[R^k]$;
- период занятости Π , его распределение $F_\Pi(s) = \mathbf{P}\{\Pi \leq s\}$ и моменты $m_k(\Pi) = \mathbf{E}[\Pi^k]$;
- стационарные вероятности состояний $\pi_j = \lim_{s \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{L(s) = j\}$;
- число N требований в системе и его моменты $m_k(N) = \sum_{0 \leq j \leq n+m} j^k \pi_j$;
- длины очереди Q и её моменты $m_k(Q) = \sum_{0 \leq j \leq n+m} (j - n)^+{}^k \pi_j$;
- распределение и моменты длительностей ожидания W и пребывания V требований в системе.

Преобразование меток при переходе из j в $j + 1$ и $j - 1 (\geq 0)$ представлены в следующей теореме.

Теорема I

При переходе $j \rightarrow j + 1$ метки преобразуются следующим образом:

$$X_{j+1}(t+1) = A_{t+1}; \quad (10)$$

при $j < n$ и $i = \overline{1, n-j}$:

$$Y_{j+1}^{(i)}(t+1) = \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - X_j(t) & \text{при } i < l, \\ B_{t+1} & \text{при } i = l \\ Y_j^{(i+1)}(t) - X_j(t) & \text{при } i > l, \end{cases} \quad (11)$$

где $l = \max\{i : Y_j^{(i)}(t) - X_j(t) \leq B_{t+1}\}$; при $j \geq n$

$$Y_{j+1}^{(i)}(t+1) = Y_j^{(i+1)}(t) - X_j(t) \quad (i = \overline{1, n-j}). \quad (12)$$

Аналогично, при переходе $j \rightarrow j - 1$ метка X_{j-1} преобразуется следующим образом:

$$X_{j-1}(t+1) = X_j(t) - Y_j^{(1)}(t); \quad (13)$$

Теорема II

преобразование метки \mathbf{Y}_j при переходе $j \rightarrow j - 1$ зависит от состояния и имеет вид:
при $j \leq n$

$$Y_{j-1}^{(i)}(t+1) = Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \quad (i = \overline{1, j}); \quad (14)$$

при $j > n$

$$Y_{j-1}^{(i)}(t+1) = \begin{cases} Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t) & \text{при } i < l, \\ B_{t+1} & \text{при } i = l, \\ Y_j^{(i+1)}(t) - Y_j^{(1)}(t) & \text{при } i > l, \end{cases} \quad (15)$$

где $l = \max\{i : Y_j^{(i)}(t) - Y_j^{(1)}(t) \leq B_{t+1}\}$.

Доказательство детали в приложении.

Вычисление характеристик в терминах меток I

Пользуясь регенеративной структурой процесса Z расчет основных QoS характеристик системы осуществляется путем их оценки с помощью имитации достаточно большого числа (допустим K) траекторий процесса Z до момента первой регенерации $S(\tau_1) \doteq R_1 \doteq R$.

Таким образом, помечая верхним индексом k соответствующие характеристики вдоль k -й траектории, на основе формул (6, 7, 8) получаем оценки

- ФР периода занятости и его первый момент,

$$\hat{F}_\Pi(x) = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} 1_{\{\Pi^{(k)} \leq x\}} \text{ и } \hat{\mu}_\Pi = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} \Pi^{(k)};$$

- ФР периода регенерации и его первый момент,

$$\hat{F}_R(x) = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} 1_{\{R^{(k)} \leq x\}} \text{ и } \hat{\mu}_R = \frac{1}{K} \sum_{1 \leq k \leq K} R^{(k)};$$

Вычисление характеристик в терминах меток II

- стационарных вероятностей состояний,

$$\hat{\pi}_j = \frac{1}{\hat{\mu}_R} \hat{S}_j^{(k)}(\cdot) = \frac{\sum_{1 \leq k \leq K} \hat{S}_j^{(k)}(\cdot)}{\sum_{1 \leq k \leq K} \hat{R}^{(k)}(\cdot)}$$

где

$$\hat{S}_j^{(k)}(\cdot) = \sum_{1 \leq t \leq \tau_1^{(k)}} \hat{T}_j(t) 1_{\{J(t)=j\}}$$

оценка времени, проведенного процессом $Z(N(s))$ в состоянии j в течение 1-го периода регенерации по k -й траектории, а $\hat{R}^{(k)}$ - оценка длительности периода регенерации вдоль k -й траектории;

- все остальные стационарные характеристики вычисляются путем замены вероятностей π_j на их оценки $\hat{\pi}_j$.

На основании представленных преобразований меток выписаны

- переходные вероятности (ядра) для меток,
- уравнения для вычисления распределений меток в терминах распределений исходных с.в. A_i , B_i ,
- однако, их решение (если и возможно) требует значительных вычислительных усилий, поэтому
- так как преобразования меток легко алгоритмически реализуемые на их основе разработан алгоритм имитационного моделирования

с помощью которого произведена серия численных исследований, которые представлены на слайдах 46 –51.

На слайдах 34 – 45 представлена модель надёжности

Численные примеры и анализ чувствительности

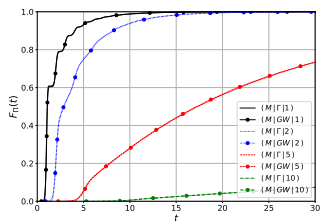
В экспериментах используются распределения Гамма (Γ) и Гнеденко-Вейбулла (GW).

	$GW(\alpha, \beta)$	$\Gamma(\alpha, \beta)$
α – параметр формы, β – параметр масштаба		
ф.р.	$F(t) = 1 - e^{-(t/\beta)^\alpha}$	$F(t) = 1 - \frac{\Gamma(\alpha, t\beta)}{\alpha}$
ф.р.	$f(t) = \frac{\alpha e^{-(t/\beta)^\alpha} (t/\beta)^{\alpha-1}}{\beta}, t > 0$	$f(t) = \frac{\beta^\alpha e^{-t/\beta} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, t > 0$
мат. ожид.	$\mu_T = \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$	$\mu_T = \frac{\alpha}{\beta}$
дисперсия	$\sigma_T^2 = \beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \mu_T^2$	$\sigma_T^2 = \frac{\alpha}{\beta^2}$
коэф. вар.	$v = \frac{\sigma_T}{\mu_T}$	$v = \frac{\sqrt{\alpha}}{\alpha}$
параметры	$\alpha, \beta = \frac{\mu_T}{\Gamma(1 + 1/\alpha)}$	$\alpha = v^{-2}, \quad \beta = \mu_T v^2$

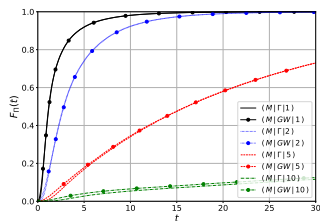
Далее для среднего μ и коэффициента вариации v различных времен будут использоваться нижние индексы, соответствующие этим с.в., A , B и Π .

Система $(M|GI|n)$ I

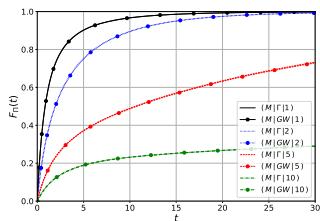
$$n = 1, 2, 5, 10, \mu_A = 2, \rho = \frac{\mu_B}{n \cdot \mu_A} = 0.5, \mu_B = 1, 2, 5, 10$$



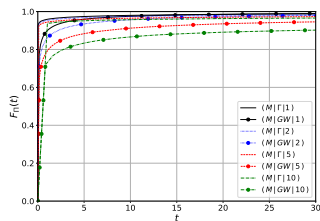
a) $v_B = 0.1$



b) $v_B = 0.5$



c) $v_B = 1$



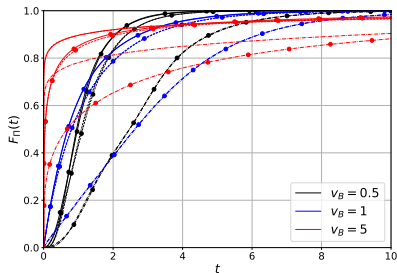
d) $v_B = 10$

Таблица: $\hat{\mu}_\Pi$ системы $(M|GI|n)$ для $B(\cdot) \sim \Gamma / GW$

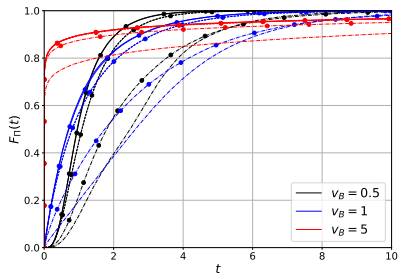
$\hat{\mu}_\Pi$	$n = 2$	$n = 5$	$n = 10$
$\nu_B = 0.1$	4.1674 / 4.1787	23.5357 / 23.4804	298.6871 / 299.0505
$\nu_B = 0.5$	4.1047 / 4.1043	23.2388 / 23.1257	297.1719 / 296.7376
$\nu_B = 1$	4.0125 / 4.0245	22.8843 / 23.0876	295.5491 / 296.3262
$\nu_B = 10$	4.0356 / 3.8161	23.0863 / 22.1556	305.3809 / 301.4704

Система $(GI|GI|3, 5)$ I

$\mu_A = 2$, $\mu_B = 2$ and $v_A = v_B = 0.5, 1, 5$
 solid: $v_A = 0.5$, dashed: $v_A = 1$, dash-dotted: $v_A = 5$



a) $A(\cdot) \sim \Gamma$, $B(\cdot) \sim GW$ – curves with markers; $B(\cdot) \sim \Gamma$ – with no markers.



b) $B(\cdot) \sim \Gamma$, $A(\cdot) \sim GW$ – curves with markers; $A(\cdot) \sim \Gamma$ – with no markers.

Таблица: QoS системы ($GI|GI|3, 5$)

QoS		$A(\cdot) \sim \Gamma, B(\cdot) \sim \Gamma / A(\cdot) \sim \Gamma, B(\cdot) \sim GW$			$A(\cdot) \sim GW, B(\cdot) \sim \Gamma$		
		$\nu_B = 0.5$	$\nu_B = 1$	$\nu_B = 5$	$\nu_B = 0.5$	$\nu_B = 1$	$\nu_B = 5$
$\nu_A = 0.5$	$\hat{\mu}_J$	0.5018 / 0.4997	0.4979 / 0.5002	0.5077 / 0.5026	0.5015	0.5001	0.5240
	$\hat{\mu}_Q$	$2 \cdot 10^{-6} / 2 \cdot 10^{-6}$	$5 \cdot 10^{-5} / 7 \cdot 10^{-5}$	0.0127 / 0.0078	$2 \cdot 10^{-5}$	10^{-3}	0.0143
	$\hat{\mu}_V$	$4 \cdot 10^{-6} / 4 \cdot 10^{-6}$	$10^{-3} / 10^{-3}$	0.0253 / 0.0155	$4 \cdot 10^{-5}$	0.0002	0.0286
	$\hat{\mu}_W$	1.0037 / 0.9993	0.9958 / 1.0003	1.0153 / 1.0053	1.0029	1.0003	1.0481
$\nu_A = 1$	$\hat{\mu}_J$	0.5019 / 0.5014	0.5047 / 0.5051	0.5148 / 0.5195	0.5000	0.5055	0.5127
	$\hat{\mu}_Q$	0.0021 / 0.0024	0.0031 / 0.0032	0.0177 / 0.0128	0.0021	0.0031	0.0168
	$\hat{\mu}_V$	0.0042 / 0.0047	0.0063 / 0.0063	0.0354 / 0.0257	0.0043	0.0062	0.0337
	$\hat{\mu}_W$	1.0037 / 1.0027	1.093 / 1.0102	1.0296 / 1.0389	1.0000	1.0109	1.0254
$\nu_A = 5$	$\hat{\mu}_J$	0.5209 / 0.5207	0.5165 / 0.5152	0.5164 / 0.4832	0.6287	0.6166	0.5286
	$\hat{\mu}_Q$	0.1872 / 0.1874	0.1732 / 0.1729	0.0903 / 0.0940	0.1644	0.1502	0.0653
	$\hat{\mu}_V$	0.3743 / 0.3748	0.3465 / 0.3459	0.1805 / 0.1880	0.3288	0.3005	0.1306
	$\hat{\mu}_W$	1.0418 / 1.0415	1.0330 / 1.0304	1.0329 / 0.9664	1.2574	1.2332	1.0573

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ

Далее представлен дополнительный материал к исследованию системы $(GI|GI|n, m)$.

Доказательство теоремы о преобразовании меток для системы $(G|G|n, m)$

Действительно, переход $j \rightarrow j + 1$ на шаге t происходит при поступлении требования. При этом метка $X_{j+1}(t + 1)$ принимает значение времени до поступления нового требования A_{t+1} , подтверждая формулу (10).

Одновременно остаточные длительности обслуживания $Y_j^{(i)}$ уменьшаются на величину X_j . Кроме того, при наличии свободных обслуживающих приборов, то есть при $j < n$, в компоненты $Y_{j+1}^{(i)}$ метки \mathbf{Y}_{j+1} на одну из позиций i между метками $Y_j^{(i-1)}$ и $Y_j^{(i)}$ добавляется новая компонента, соответствующая длительности B_{t+1} обслуживания вновь поступившего требования, при этом метки предшествующие $i - 1$ -ой занимают те же позиции, а метки следующие за вновь поступившей сдвигаются на одну позицию вправо, что доказывает формулу (11).

Если же все приборы заняты, то есть при $j \geq n$, то вновь поступившее требование становится в очередь и компоненты $Y_j^{(i)}(t)$ метки $\mathbf{Y}_j(t)$ сдвигаются на величину $X_j(t)$, что доказывает формулу (12).

Аналогично, переход $j \rightarrow j - 1$ на шаге t возможен только при $j > 1$ и происходит при окончании обслуживания одного из требований. При этом время $X_j(t)$ до поступления очередного требования уменьшается на величину $Y_j^{(1)}(t)$, что доказывает формулу (13).

Преобразование метки $\mathbf{Y}_j(t)$ при переходе $j \rightarrow j - 1$ зависит от состояния системы: если ожидающие требования отсутствуют, то есть при $j \leq n$, компоненты вектора $\mathbf{Y}_j(t)$ просто уменьшаются на величину $Y_j^{(1)}(t)$, что доказывает формулу (14).

Однако при наличии ожидающих требований, то есть при $j > n$, одно из них поступает на обслуживание и компоненты вектора $\mathbf{Y}_j(t)$ после сдвига на величину $Y_j^{(1)}(t)$ дополняются длительностью обслуживания B_{t+1} вновь принятого к обслуживанию требования, которое занимает одну из позиций в соответствии с формулой (15). Таким образом все формулы (10) – (15) доказаны.

В этих выражениях с.в. A_t и B_t являются независимыми от прошлого $\mathcal{F}_t = \sigma\{Z(s) : s \leq t\}$ процесса Z . Таким образом, полученные выражения показывают, что последовательность меток вычисляется рекуррентно с помощью независимых от прошлого процесса $Z(t)$ с.в., то есть набор меток образует в пространстве меток марковскую цепь специального вида.

Опираясь на полученные преобразования меток вычислим теперь их переходные вероятности (ядра).

Вычисление переходных вероятностей меток

Определим операторы сдвигов Sh и пополнения Ad на значения $\mathbf{v}_j = (x_j, \mathbf{y}_j)$ меток \mathbf{V}_j , полагая,

$$\begin{aligned}x^i(Sh[\mathbf{x}_n, x]) &= x^i - x, \text{ при } i = \overline{1, n}; \\x^i(Ad[\mathbf{x}_n, x]) &= \begin{cases} x^i & \text{для } i < l, \\ x & \text{для } i = l, \\ x^{i+1} & \text{для } i > l, \end{cases}\end{aligned}$$

где $l = \max\{i : x^i < x\}$.

Через $P_j(\mathbf{v}_j, C_{j+1})$ и $Q_j(\mathbf{v}_j, C_{j-1})$ обозначим переходные вероятности (ядра) преобразований меток при переходе из состояния j в состояния $j+1$ и $j-1$,

$$\begin{aligned}P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) &= \mathbf{P}\{X_j \leq Y_j^{(1)}, \mathbf{V}_{j+1} \in C_{j+1} | \mathbf{V}_j = \mathbf{v}_j\}; \\Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) &= \mathbf{P}\{X_j > Y_j^{(1)}, \mathbf{V}_{j-1} \in C_{j-1} | \mathbf{V}_j = \mathbf{v}_j\}.\end{aligned}$$

Заметим, что при переходе основного процесса из одного состояния в другое только одна из компонент приобретает новое значение. Это позволяет определить ядра на специальных множествах, при описании которых будем пользоваться обозначениями

$$\Delta_j^i Sh[\mathbf{y}_j, x_j] = (y_j^{i-1} - x_j, y_j^i - x_j], \quad \Delta_j^i Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1] = (y_j^{i-1} - y_j^1, y_j^i - y_j^1];$$

$$\Delta_j^i B(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1]) = B(y_j^i - y_j^1) - B(y_j^{i-1} - y_j^1);$$

$$\Delta_j^i B(Sh[\mathbf{y}_j, x_j]) = B(y_j^i - x_j) - B(y_j^{i-1} - x_j).$$

При переходе $j \rightarrow j + 1$ при $j < n$, положим

$$C_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v}_j, x) = \{\mathbf{v}_{j+1} : Ad[Sh[\mathbf{v}_j, x_j], A_{t+1} \in [0, x], B_{t+1} \in \Delta_j^i(Sh[\mathbf{y}_j, x_j])]\};$$

Аналогично, при $j \geq n$ положим

$$C_{j+1}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j+1} : A_{t+1} \in [0, x], Sh[\mathbf{y}_j, x_j]\}.$$

При переходе $j \rightarrow j - 1$ при $j \leq n$ положим

$$C_{j-1}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j-1} : Sh[\mathbf{v}_j, y_j^1]\}.$$

Аналогично, при $j > n$ положим

$$C_{j-1}^{(i)}(\mathbf{v}_j) = \{\mathbf{v}_{j-1} : Ad[Sh[\mathbf{v}_j, y_j^1], B_{t+1} \in \Delta_j^i(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1])]\}.$$

Лемма

Ядра преобразования меток при переходе $j \rightarrow j + 1$ имеют вид: при $j < n$

$$P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) = \begin{cases} A(x) \times \Delta B_j^i(Sh[\mathbf{y}_j, x_j]) & \text{для } C_{j+1} = C_{j+1}^{(i)}(\mathbf{v}_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

при $j \geq n$

$$P_j(\mathbf{v}_j; C_{j+1}) = \begin{cases} A(x) & \text{для } C_{j+1} = C_{j+1}(\mathbf{v}_j, x), \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases} \quad (16)$$

Аналогично, при переходе $j \rightarrow j - 1$ при $j \leq n$,

$$Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) = \begin{cases} 1_{\{Ad[\mathbf{v}_j, y_j^1] \in C_{j-1}\}} & \text{для } C_{j-1} = C_{j-1}(\mathbf{v}_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (17)$$

при $j > n$

$$Q_j(\mathbf{v}_j; C_{j-1}) = \begin{cases} \Delta B_j^i(Sh[\mathbf{y}_j, y_j^1], e_j(1)) & \text{для } C_{j-1} = C_{j-1}(\mathbf{v}_j), \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (18)$$

Опираясь на ядра P_j и Q_j преобразования меток, выпишем уравнения для их мер $\mu_j(t, \cdot) = \mathbf{P}\{\mathbf{V}_j(t) \in \cdot\}$ в терминах преобразований меток P_j и Q_j

$$\mu_j(t+1, \cdot) = \int \mu_{j-1}(t, d\mathbf{v}_{j-1}) P_{j-1}(\mathbf{v}_{j-1} \cdot) + \int \mu_{j+1}(t, d\mathbf{v}_{j+1}) Q_{j+1}(\mathbf{v}_{j+1} \cdot),$$

которые в операторных обозначениях могут быть переписаны в виде

$$\mu_j(t+1, \cdot) = \mu_{j-1} P_{j-1}(t, \cdot) + \mu_{j+1} Q_{j+1}(t, \cdot).$$

В предположении об абсолютной непрерывности распределений с.в. A и B меры меток процесса Z также абсолютно непрерывны,

$$\mu_j(t; C) = \int_C \cdots \int f_j(t; x, y^1, \dots, y^{j \wedge n}) dx \prod_{1 \leq i \leq j \wedge n} dy^i,$$

где функции $f_j(t, \mathbf{v}_j)$ представляют собой плотности распределений меток процесса Z .

Theorem

П.р. меток процесса Z в соседних состояниях $j-1, j, j+1$ на двух последующих шагах t и $t+1$ связаны соотношениями: при $j \leq n$

$$\begin{aligned} f_j(t+1; x_j, y_j) &= \sum_{1 \leq i \leq j} a(x_j) b(y_j^i) \left(B(y_j^{i+1}) - B(y_j^{i-1}) \right) \int_{u \leq y_j^1} f_{j-1}(t; u, y_j^i + u) du + \\ &+ \int_{u \leq x_j} f_{j+1}(t; x_j + u, u, y_j + u) du; \end{aligned} \quad (19)$$

при $j > n$

$$\begin{aligned} f_j(t+1; x_j, y_j) &= a(x_j) \int_{u \leq x_j} f_{j-1}(t; u, y_j^i + u) du + \\ &+ \sum_{1 \leq i \leq j} b(y_j^i) \left(B(y_j^{i+1}) - B(y_j^{i-1}) \right) \int_{u \leq y_j^1} f_{j+1}(t; x_j + u, u, y_j + u) du \end{aligned} \quad (20)$$

где использованы обозначения

$$y_j^i = (y_j^1, \dots, y_j^{i-1}, y_j^{i+1}, \dots, y_j^{j \wedge n}).$$

Алгоритм вычисления характеристик производительности системы $(GI|GI|n, m)$

Вычисление характеристик модели опирается на метод имитационного моделирования, при этом операторы сдвига $Sh[\mathbf{v}_j, v]$ и пополнения $Ad[\mathbf{v}_j, v]$ применяются к реализациям с.в.:

$$\begin{aligned} Sh[\mathbf{v}_j, v] &\equiv \{\mathbf{v}_{sh} : v_{sh}^i = v_j^i - v, (i = \overline{1, j}, v \leq v_j^1)\} \\ Ad[\mathbf{v}_j, v] &\equiv \{\mathbf{v}_{ad}(v) : v_{ad}^i(v) = v_j^i \text{ при } i < l, v_{ad}^l(v) = v, \\ &\quad v_{ad}^{l+1}(v) = v_j^l \text{ при } i > l (i = \overline{1, j-1})\}, \end{aligned}$$

где $l = \max\{i : v_j^i < v\}$.

Напомним, что при применении этих операторов к переменной x_j и массиву \mathbf{y}_j они имеют размерности 1 и $n + m$ соответственно.

Исходные данные.

Целые n, m, K – число реализаций модели, k – счетчик числа реализаций. Распределения $A(\cdot), B(\cdot)$ случайных величин A_i, B_i , соответствующие средние (a, b) и коэффициенты вариации (v_a, v_b) .

Подготовить счётчики: $\nu_j = 0$ ($j = \overline{0, m+n}$) – число посещений состояний $j = \overline{1, m+n}$; и массивы: $\Pi = [0] * K$ – время до возвращения системы в состояние 0 (продолжительность периода регенерации); t_1, \dots, t_{m+n} – длительности пребывания системы в состояниях $j = \overline{1, m+n}$.

Начало.

Положить $j = 0, k = 1$ и вычислить начальное состояние системы в виде $x_0 = A_0, y_0 = \{y_0^1 = \infty\}$.

Шаг 1. Если $k < K$, то переход на Шаг 2, в противном случае переход на Шаг 6.

Шаг 2. Если $j = 0$, Считать $t_j := t_j + x_j, \nu_j := \nu_j + 1, j := j + 1$. Вычислить $x_j = A_j, y_j = Ad[B]$.

Перейти на шаг 5.

Алгоритм. Продолжение

Шаг 3. Пока $0 < j < n + m$, повторять:

если $x_j \leq y_j^1$:

положить $t_j := t_j + x_j$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $\Pi_k := \Pi_k + x_j$ $j := j + 1$;

вычислить $x_j = A_j$;

если $j \leq n$, то $y_j = Ad[Sh[y_{j-1}, x_{j-1}], B]$

иначе $j > n$, то $y_j = Sh[y_{j-1}, x_{j-1}]$

если $x_j > y_j^1$:

положить $t_j := t_j + y_j^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $\Pi_k := \Pi_k + y_j^1$, $j := j - 1$;

вычислить $x_j = Sh[x_{j-1}, y_{j-1}^1]$;

если $j \leq n$, то $y_j = Sh[y_{j-1}, x_{j-1}]$

иначе $j > n$, то $y_j = Ad[Sh[y_{j-1}, x_{j-1}], B]$

Если $j = 0$, то положить $Y_j^{(1)} = \infty$ и перейти на Шаг 2. Если $j = n + m$, то перейти на Шаг 4. Иначе Шаг 3 повторяется, пока верно условие $0 < j < n + m$.

Шаг 4. Если $j = n + m$,

если $x_j \leq y_j^1$:

вычислить $x_j = A_j$; $y_j = Sh[y_{j-1}, x_{j-1}]$; Повторить Шаг 4 сначала.

если $x_j > y_j^1$:

положить $t_j := t_j + y_j^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $\Pi_k := \Pi_k + y_j^1$, $j := j - 1$;

вычислить $x_j = Sh[x_{j-1}, y_{j-1}^1]$, $y_j = Ad[Sh[y_{j-1}, y_{j-1}^1], B]$.

Перейти на шаг 3.

Шаг 5. Сбор статистики:

- заполнение массива $\nu_j := \nu_j + 1$,
- заполнение массива Π значениями Π_k ,
- заполнение массива t_1, \dots, t_{n+m} .

Положить $k := k + 1$. Перейти на шаг 3.

Шаг 6. Обработка статистики:

- вычисление оценок распределения числа посещений состояний $\hat{\nu}_j$,
$$\hat{\nu}_j = \frac{\nu_j}{\sum_{j \leq k} \nu_j},$$
- вычисление оценок распределения вероятностей состояний $\hat{\pi}_j$, $\hat{\pi}_j = \frac{t_j}{\sum t_j}$,
- вычисление эмпирической функции распределения периода занятости
$$\hat{F}_{\Pi}(t) = \frac{1}{K} \Pi_k, \quad \Pi_k \leq t \leq \Pi_{k+1},$$
- оценки среднего значения периода занятости системы, $\hat{m}_{\Pi} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \Pi_k$,
- вывод результатов.

СТОП.

Первая модель Эрланга, $M|M|1$

Положим среднее время между поступлениями требований $a = 2$, нагрузка на прибор $\rho = 0.5, 0.8, 0.95$, среднее время обслуживания вычисляется как $b = a\rho$.

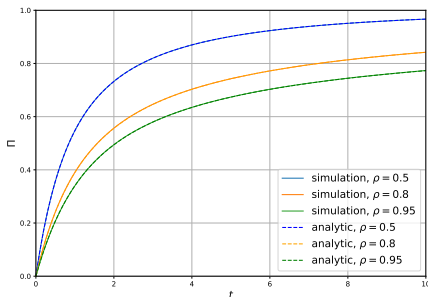


Рис.: Функция распределения периода занятости системы $M|M|1$ при изменении ρ

Аналитика / Алгоритм	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.8$	$\rho = 0.95$
μ_{Π}	2 / 2.0026	8 / 8.0038	38 / 37.7064
ν_{Π}	1.7321 / 1.7321	3 / 2.9996	6.2445 / 6.2199

Система $M|GI|1$

Положим $n = 1$, $m = 10^4$, $a = 2$, $v_b = 0.1, 0.5, 1, 10$, $\rho = 0.5, 0.8, 0.95$, тогда $b = \rho \cdot a = 1, 1.6, 1.9$.

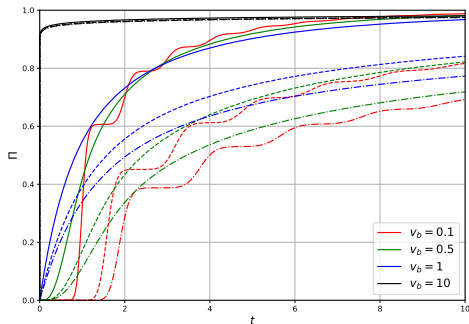


Рис.: Ф.р. периода занятости системы $M|GI|1$ при изменении v_b и ρ

- цвет линии определяет значение коэффициента вариации времени обслуживания v_b (в соответствии с легендой рисунка),
- тип линии определяет значение нагрузки ρ : сплошная для $\rho = 0.5$, пунктирная для $\rho = 0.8$ и штрихпунктирная для $\rho = 0.95$.

Таблица: Характеристики периода занятости, μ_{Π}

Γ / GW	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.8$	$\rho = 0.95$
Аналитика	2	8	37.99
$v_b = 0.1$	2.0032 / 1.9991	8.0563 / 8.0169	37.5108 / 37.7269
$v_b = 0.5$	2.0062 / 2.0034	8.0093 / 8.0229	38.2819 / 38.0612
$v_b = 1$	1.9947 / 1.9976	7.9947 / 7.9713	38.5953 / 38.1866
$v_b = 10$	2.0202 / 1.9476	7.9357 / 8.4624	38.8837 / 31.2089

Таблица: Характеристики периода занятости, v_{Π}

Аналит./ Γ/GW	$\rho = 0.5$	$\rho = 0.8$	$\rho = 0.95$
$v_b = 0.1$	1.01 / 1.01 / 1.01	2.01 / 2.03 / 2.04	4.38 / 4.38 / 4.37
$v_b = 0.5$	1.22 / 1.23 / 1.22	2.29 / 2.27 / 2.29	4.90 / 4.94 / 4.91
$v_b = 1$	1.73 / 1.74 / 1.74	3 / 2.96 / 2.98	6.25 / 6.26 / 6.51
$v_b = 10$	14.2 / 13.7 / 14.1	22.5 / 22.9 / 21.9	44.9 / 38.9 / 35.4

Система $M|G|1$, продолжение

Характеристики системы $M|G|1$, аналитика

	$\rho = 0.5$			$\rho = 0.8$			$\rho = 0.95$		
	m_N	m_V	m_W	m_N	m_V	m_W	m_N	m_V	m_W
$v_b = 0.1$	0.7525	0.505	1.505	2.416	3.232	4.832	10.0652	18.2305	20.13405
$v_b = 0.5$	0.8115	0.625	1.625	2.8	4	5.6	12.2312	22.5625	24.4625
$v_b = 1$	1	1	2	4	6.4	8	19	36.1	38
$v_b = 10$	25.75	50.5	51.5	162.4	323.2	324.8	912.475	1823.05	1824.95

Характеристики системы $M|G|1$, $\rho = 0.5$

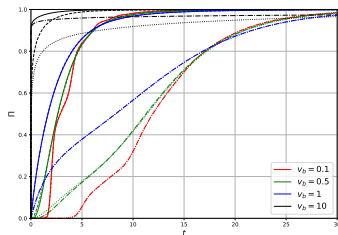
	m_N		m_V		m_W	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_b = 0.1$	0.7524	0.7548	0.5043	0.5075	1.5041	1.5095
$v_b = 0.5$	0.8129	0.8098	0.6257	0.6198	1.6259	1.6195
$v_b = 1$	0.9949	0.9985	0.9924	0.9988	1.9898	1.9969
$v_b = 10$	25.2813	22.5527	49.5701	44.1154	50.5627	45.1053

Характеристики системы $M|G|1$, $\rho = 0.8$

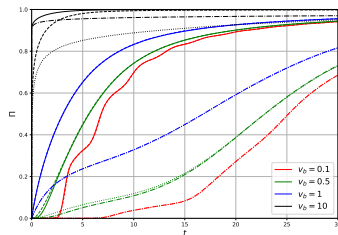
	m_N		m_V		m_W	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_b = 0.1$	2.4127	2.4133	3.2244	3.2254	4.8254	4.8266
$v_b = 0.5$	2.7957	2.8158	3.9915	4.0305	5.5913	5.6316
$v_b = 1$	4.0097	3.9786	6.4211	6.3584	8.0193	7.9573
$v_b = 10$	162.191	176.425	322.804	351.239	324.381	352.850

Система $M|GI|n$

Положим $n = 2, 5$, $a = 2$, $\rho = \frac{b}{n \cdot a} = 0.5, 0.8$; при $n = 2$ среднее $b = 2, 3.2$, а при $n = 5$ среднее $b = 5, 8$.



а) $\rho = 0.5$



б) $\rho = 0.8$

Рис.: Ф.р периода занятости системы $M|GI|n$ при изменении B и v_b

- цвет линии определяет значение коэффициента вариации времени обслуживания v_b (в соответствии с легендой рисунка),
- тип линии определяет распределение времени обслуживания и количество обслуживающих устройств: сплошная и пунктирная линии при $n = 2$ для $B \sim \Gamma$ и $B \sim GW$ соответственно; штрихпунктирная и штриховая $n = 5$ для $B \sim \Gamma$ и $B \sim GW$ соответственно.

Таблица: Характеристики периода занятости системы $M|G|n$

	$\mu\pi$				$\nu\pi$			
	$\rho = 0.5$		$\rho = 0.8$		$\rho = 0.5$		$\rho = 0.8$	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$n = 2$								
$\nu_b = 0.1$	3.5563	3.5526	11.0128	11.0853	0.6062	0.6093	1.3811	1.4103
$\nu_b = 0.5$	3.2697	3.2559	10.0214	9.9712	0.7968	0.7993	1.6671	1.7021
$\nu_b = 1$	2.6454	2.6293	7.7487	7.7199	1.2468	1.2443	2.5541	2.5457
$\nu_b = 10$	0.1431	0.4417	0.2661	0.9279	24.9326	7.9837	57.1961	49.9863
$n = 5$								
$\nu_b = 0.1$	12.053	12.8893	28.4182	28.3752	0.4652	0.4623	0.5944	0.5859
$\nu_b = 0.5$	11.9302	11.9465	25.6019	25.5093	0.5809	0.5932	0.7094	0.7283
$\nu_b = 1$	9.8682	9.9089	19.1872	19.2678	0.8809	0.8808	1.0634	1.0632
$\nu_b = 10$	3.7737	3.329	4.8044	4.4648	7.2108	3.5659	6.8007	3.0617

Характеристики системы $M|G|n, \rho = 0.5$

$n = 2$						
	m_N		m_V		m_W	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_b = 0.1$	1.0819	1.0820	0.3019	0.3032	2.1637	2.1641
$v_b = 0.5$	1.0777	1.0756	0.3467	0.3456	2.1553	2.1511
$v_b = 1$	1.0706	1.0622	0.4805	0.4721	2.1412	2.1244
$v_b = 10$	0.8479	0.8435	1.5177	1.2204	1.6959	1.6869
$n = 5$						
$v_b = 0.1$	2.2418	2.2419	0.1098	0.1097	4.4836	4.4838
$v_b = 0.5$	2.1449	2.1456	0.1053	0.1066	4.2898	4.2913
$v_b = 1$	1.9110	1.9155	0.0944	0.0961	3.8220	3.8309
$v_b = 10$	0.8907	0.8926	0.0009	0.0025	1.7814	1.7852

Характеристики системы $M|G|n, \rho = 0.8$

$n = 2$						
	m_N		m_V		m_W	
	Γ	GW	Γ	GW	Γ	GW
$v_b = 0.1$	2.5996	2.6356	2.2726	2.3390	5.1992	5.2712
$v_b = 0.5$	2.8193	2.8457	2.7490	2.8017	5.6386	5.6915
$v_b = 1$	3.4717	3.4889	4.1817	4.2207	6.9434	6.9779
$v_b = 10$	7.9110	40.7975	15.4439	80.5925	15.8220	81.5949
$n = 5$						
$v_b = 0.1$	3.8867	3.8721	1.2556	1.2277	7.7735	7.7441
$v_b = 0.5$	3.7567	3.7719	1.2746	1.3119	7.5134	7.5438
$v_b = 1$	3.4217	3.4509	1.3653	1.4052	6.8433	6.9019
$v_b = 10$	1.0213	1.0737	0.0447	0.0401	2.0425	2.1475

Алгоритм вычисления характеристик надежности системы $(G|_{k \leq n} | G| | I)$

Подготовка: Ввести исходные данные: целые n, k . M – число реализаций модели, I – количество обслуживающих устройств. Задать распределения $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ случайных величин A_i , B_i , соответствующие средние $\mu_A = a$, $\mu_B = b$) и коэффициенты вариации v_A , v_B).

Подготовить счётчики: $\nu_j = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ – число посещений состояний $j = \overline{1, k}$; m – счётчик числа реализаций; и массивы: $R = [0] * M$ – время до отказа системы, t_1, \dots, t_k – длительности пребывания системы в состояниях $j = \overline{1, k}$.

Начало.

Положить $j = 0$, $m = 1$. Моделировать n реализаций с.в. $A \in A(\cdot)$ и вычислить начальное состояние системы в виде вариационного ряда из этой выборки

$$\mathbf{x}_0 = \{x_0^i \ (i = \overline{1, n}) : x_0^1 \leq x_0^2 \leq \dots \leq x_0^n\}, \quad \mathbf{y}_0 = \{y_0^1 = \infty\}.$$

Шаг 1. Если $m < M$, то переход на Шаг 2, в противном случае – на Шаг 6.

Шаг 2. Считать $t_j := t_j + x_0^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $R_m := R_m + x_0^1$, $j := j + 1$.

Вычислить $\mathbf{x}_j = Sh[\mathbf{x}_{j-1}]$, $\mathbf{y}_j = Ad[B]$. Переход на Шаг 3.

Шаг 3. Пока $0 < j < k$, повторять:

если $x_j^1 \leq y_j^1$:

положить $t_j := t_j + x_j^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $R_m := R_m + x_0^1$, $j := j + 1$;

вычислить $\mathbf{x}_j = Sh[\mathbf{x}_{j-1}, x_{j-1}^1]$, $\mathbf{y}_j = Sh[\mathbf{y}_{j-1}, y_{j-1}^1]$;

если $j \leq l$,

то $\mathbf{y}_j = Ad[B]$;

если $x_j^{(1)} > y_j^{(1)}$:

положить $t_j := t_j + y_j^1$, $\nu_j := \nu_j + 1$, $R_m := R_m + y_j^1$, $j := j - 1$;

вычислить

если $j = 0$:

$\mathbf{x}_j = Ad[Sh[\mathbf{x}_{j-1}, y_{j-1}^1], A]$, $\mathbf{y}_j = \{y_j^1 = \infty\}$. Переход на Шаг 2;

иначе $j \neq 0$:

$\mathbf{x}_j = Ad[Sh[\mathbf{x}_{j-1}, y_{j-1}^1], A]$;

если $j < l$,

$\mathbf{y}_j = Sh[\mathbf{y}_{j-1}, y_{j-1}^1]$;

иначе $j \geq l$ или $l = 1$,

$\mathbf{y}_j = Ad[Sh[\mathbf{y}_{j-1}, y_{j-1}^1], B]$.

Шаг 4. Если $j = k$, то положить $j = 0$ и перейти на Шаг 5.

Шаг 5. Сбор статистики:

- заполнение массива ν_j ,
- заполнение массива R значениями R_m ,
- заполнение массива t_1, \dots, t_k .

Положить $m := m + 1$. Перейти на Начало.

Шаг 6. Обработка Статистики:

- вычисление распределения числа ν_j посещений состояний j ,

$$\hat{\nu} = \frac{\nu_j}{\sum_{j \leq k} \nu_j},$$

- вычисление эмпирической функции надежности R ,

$$\hat{R}(t) = 1 - \frac{1}{M} R_m, \quad R_m \leq t < R_{m+1},$$

- среднего времени жизни системы,

$$\mu_R = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M R_m,$$

- вывод результатов.

СТОП.