Ветвящийся винеровский процесс с сингулярной интенсивностью ветвления.

Н.В.Смородина

ПОМИ РАН, лаб. прикладных вероятностных и алгоритмических методов,
физический факультет СПбГУ.

МКСМ-10, 3 июня, 2025

Пусть $w(t)$, $t \geqslant 0$ – стандартный винеровский процесс, $w(0) = 0$, $w_x(t) = x + w(t)$. Рассмотрим ветвящуюся версию этого процесса в предположении, что параметры ветвления зависят от точки, в которой процесс находится в момент ветвления. Частица стартует из точки $x \in \mathbb{R}$ и экспоненциальное время (с параметром единица) движется вдоль траектории винеровского процесса $w_x(t)$. В экспоненциальный момент времени частица исчезает и вместо нее в этой же точке возникают несколько новых частиц, которые, следуя тому же правилу, движутся по траекториям независимых винеровских процессов и снова ветвятся в независящие друг от друга экспоненциальные моменты времени. Количество N появившихся новых частиц при каждом ветвлении является случайной величиной с распределением, зависящим от точки, в которой произошло ветвление . Через $p_k(x)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим вероятность того, что частица разделилась на k частиц, при условии, что ветвление произошло в точке $x \in \mathbb{R}$.

Ветвящийся процесс можно рассматривать как марковский процесс, со значениями в пространстве конечных конфигураций $\mathcal{X}(\mathbb{R})$.
Через $X_x(t)$ обозначим ветвящийся винеровский процесс, удовлетворяющий условию $X_x(0) = \{x\}$, то есть в начальный момент времени у нас имеется единственная частица, находящаяся в точке $x \in \mathbb{R}$. Мы ограничимся только нахождением математических ожиданий функционалов $I_{t,x}(\varphi)$ от процесса $X_x(t)$, задаваемые как

$$I_{t,x}(\varphi) = \sum_{y \in X_x(t)} \varphi(y),$$

где $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ измеримая функция.

В случае, когда $I_{t,x}(\varphi)$ при всех $t > 0$ имеет конечное математическое ожидание, семейство операторов

$$[P^t\varphi](x) = \mathbb{E}I_{t,x}(\varphi) = \sum_{y \in X_x(t)} \varphi(y)$$

образует полугруппу, т.е. $P^{t+s} = P^t P^s$ для всех $t, s \geqslant 0$, а функция $u(t,x) = \mathbb{E}I_{t,x}(\varphi)$ решает задачу Коши

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\,\partial^2_{xx} u + \beta(x)u, \quad u(0,x) = \varphi(x),$$

где

$$\beta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k(x) - 1.$$

Величину $\beta(x)$ называют интенсивностью ветвления в точке x. В рамках нашего подхода все схемы ветвления с одной и той же интенсивностью ветвления $\beta(x)$ неразличимы. Условимся называть класс эквивалентности таких процессов *ветвящимся процессом в широком смысле*.

Нас интересует случай, когда интенсивность ветвления $\beta(x)$ есть

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \delta(x - x_j) - C,$$

или

$$\beta(x) = -|x|^{-1-\alpha} - C,\ \alpha \in (0, 1/2)$$

По определению

$$(\beta, \varphi) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{|x|^{1+\alpha}}\, dx.$$

Отдельно нужна "теорема существования".

Уравнение

$$\partial_t u = \frac{1}{2}\,\partial^2_{xx} u + \beta(x)u, \quad u(0,x) = \varphi(x),$$

– аналог обратного уравнения Колмогорова, описывающего эволюцию функций

$$\varphi \mapsto P^t \varphi.$$

В отличие от обычного уравнения Колмогорова, оператор P^t вообще говоря не является сжимающим оператором в равномерной метрике и не определяет процесс.
Выпишем теперь аналог прямого уравнения Колмогорова, описывающего эволюцию мер.

Пусть ν – мера конечной полной вариации на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Для $t > 0$ определим меру νP^t, полагая для $\Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$$\left[\nu P^t\right](\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \int \left[P^t 1_\Gamma\right](x)\nu(dx).$$

Если ν неотрицательна, меру νP^t в терминах ветвящегося случайного блуждания можно интерпретировать следующим образом. Пусть в начальный момент времени у нас имеется случайная конфигурация частиц, причем среднее число частиц в любом борелевском множестве Γ есть $\nu(\Gamma)$. Далее, отталкиваясь от этой конфигурации, запустим ветвящееся случайное блуждание и посмотрим на него в момент времени $t > 0$. Для каждого борелевского Γ величина $\nu P^t(\Gamma)$ есть среднее число частиц ветвящегося случайного блуждания в момент времени t в множестве Γ. При этом усреднение производится как по начальным конфигурациям, так и по траекториям ветвящегося процесса.

На множестве кусочно-постоянных функций вида

$$\varphi = \sum_{k=1}^{K} a_k 1_{\Gamma_k},$$

оператор P^t, действующий на функции и оператор P^t, действующий на меры, являются формально сопряженными т.е. $(\nu, P^t\varphi) = (\nu P^t, \varphi)$.
Мы рассматриваем только случай, когда оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным. Т.е. обратное уравнение Колмогорова фактически совпадет с прямым, различия будут только в интерпретации решений задачи Коши.
Пусть $\beta(x) = \lambda\delta(x)$ – единственный источник ветвления в нуле, $\lambda > 0$.

Приведем известные факты, относящиеся к определению самосопряженного оператора

$$\mathcal{A}^\lambda = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\delta(x).$$

1. Область определения $\mathcal{A}^\lambda$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^\lambda) = \{f \in W_2^1(\mathbb{R}) : f \in W_2^2(\mathbb{R}_\pm), [f']_{0-}^{0+} = -\lambda f(0)\}.$$

2. Для $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^\lambda)$ при $x \neq 0$

$$\mathcal{A}^\lambda f(x) = -\frac{1}{2}f''(x).$$

3. Абсолютно непрерывный спектр оператора $\mathcal{A}^\lambda$ есть $[0, \infty)$. При $\lambda > 0$ у оператора $\mathcal{A}^\lambda$ имеется единственное собственное значение $-\frac{\lambda^2}{2}$, которому отвечает собственная функция $e^{-\lambda|x|}$.

Способ генерации траекторий.
Частица стартует из точки $x \in \mathbb{R}$ и движется вдоль траектории винеровского процесса $w_x(t)$, $w_x(0) = x$. Через $l(t, x)$ обозначим локальное время процесса w_x в нуле до момента времени t. Заметим, что п.н. $l(t, x)$ – непрерывная неубывающая функция t . Пусть Π – пуассоновское поле на $[0, \infty)$ с интенсивностью $\lambda \cdot l(dt, x)$. Точки этого пуассоновского поля появляются только в те моменты t, для которых $w_x(t) = 0$. В момент появления первой точки этого пуассоновского поля исходная частица исчезает, а вместо нее в начале координат появляются две новые частицы, движущиеся независимо друг от друга по тому же закону, что и исходная частица.

Генератор соответствующей полугруппы P^t есть

$$-\mathcal{A}^\lambda = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \lambda\delta(x),$$

причем $\sigma(\mathcal{A}^\lambda) = \{-\frac{\lambda^2}{2}\} \cup [0, \infty)$. Прибавим теперь к оператору $\mathcal{A}^\lambda$ тождественный оператор, умноженный на $\frac{\lambda^2}{2}$, у получившегося оператора левый край спектра будет точкой ноль. Какой операции над ветвящимся процессом это соответствует?

Пусть $X_x(t)$ – ветвящееся случайное блуждание с интенсивностью ветвления $\beta(x)$). Для каждого $\kappa > 0$ через $X_x^\kappa(t)$ обозначим новое ветвящееся случайное блуждание с интенсивностью $\beta(x) - \kappa$. Это ветвящееся случайное блуждание легко строится из исходного, именно, каждой появившейся новой частице мы придаем ни от чего другого не зависящую экспоненциально распределенную случайную величину ρ с параметром κ. В момент ρ, если эта частица еще существовала, она исчезает, не оставляя потомства.

Условимся называть такое ветвящееся случайное блуждание *спектрально сдвинутым* на α.
Таким образом, у спектрально сдвинутого случайного блуждания $X_x^{\lambda^2/2}(t)$ генератор полугруппы есть $-\mathcal{A}_0^\lambda$, где

$$\mathcal{A}_0^\lambda = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} - \lambda\delta(x) + \frac{\lambda^2}{2},$$

то есть левый край спектра оператора $\mathcal{A}_0^\lambda$ совпадает с нулем, а интервал $(0, \frac{\lambda^2}{2})$ является спектральной лакуной.

Рассмотрим для ветвящегося случайного блуждания $X_x^{\lambda^2/2}(t)$ оператор P^t, вида, действующий на меры. Так как генератор полугруппы является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R})$, то на множестве абсолютно непрерывных знакопеременных мер с квадратично суммируемой плотностью действие этого оператора совпадает с действием сопряженного оператора, действующего на плотность меры.

Так как для процесса $X_x^{\lambda^2/2}(t)$ ноль является собственным значением, отвечающим собственной функции $e^{-\lambda|x|}$, то эта функция и является инвариантной плотностью, другими словами, инвариантным распределением является распределение Коши (или любое ему пропорциональное).

Следующая теорема показывает, что при $t \to \infty$ плотность произвольного распределения экспоненциально быстро сближается с инвариантной.

Через φ_λ^0 обозначим функцию

$$\varphi_\lambda^0(x) = \sqrt{\lambda} e^{-\lambda|x|}$$

и заметим, что $\|\varphi_\lambda^0\|_2 = 1$.

Theorem

Пусть $\lambda > 0$, $X_x^{\lambda^2/2}(t)$ – ветвящийся винеровский процесс, порождающий полугруппу P^t с генератором $-\mathcal{A}_0^\lambda$. Пусть ν – абсолютно непрерывная мера с плотностью $q \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда для любого $t > 0$ мера νP^t абсолютно непрерывна, а ее плотность q_t удовлетворяет неравенству

$$\|q_t - (q, \varphi_\lambda^0)\varphi_\lambda^0\|_2 \leqslant e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \|q - (q, \varphi_\lambda^0)\varphi_\lambda^0\|_2 \leqslant e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \|q\|_2.$$

Рассмотрим теперь случай $\beta(x) = -\lambda \cdot |x|^{-1-\alpha}$, где $\alpha \in (0, 1/2)$, $\lambda > 0$. Обобщенная функция β действует на основную функцию φ как

$$\lambda \int \frac{\varphi(0) - \varphi(x)}{|x|^{1+\alpha}}\, dx = \lambda \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(0) - \varphi(x)}{|x|^{1+\alpha}}\, dx.$$

$$= \lambda \Big(\frac{2}{\alpha \varepsilon^{\alpha}} \varphi(0) - \int_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{|x|^{1+\alpha}}\, dx \Big).$$

У генератора полугруппы P^t есть единственная собственная функция g_λ вида

$$g_\lambda(x) = 1 - A_1 |x|^{1-\alpha} - A_2 |x|^{2-2\alpha} + O(|x|^{3-3\alpha}) \quad x \to 0.$$

Рассмотрим случай, когда интенсивность ветвления имеет вид

$$\beta(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \delta(x - x_j) - A,$$

где $x_1 < x_2 < \dots < x_N$.
Будем далее предполагать, что все $\lambda_j \neq 0$, а точки x_j для которых $\lambda_j < 0$ условимся называть поглощающими.
Параметр A мы исходно предположим равным нулю, а потом с помощью сдвига спектра подберем A таким образом, чтобы правый край спектра генератора соответствующей полугруппы P^t попал в точку ноль.

Генератор полугруппы P^t, порождаемый соответствующим ветвящимся процессом, есть оператор

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \delta(x - x_j).$$

Обозначим

$$\mathcal{A} = -\frac{d^2}{dx^2} - \sum_{j=1}^{N} 2\lambda_j \delta(x - x_j)$$

(коэффициент 2 здесь добавлен для удобства).

Форма a, соответствующая оператору $\mathcal{A}$, задана на $\mathcal{D}[a] = W_2^1(\mathbb{R})$ и имеет вид

$$a[u, v] = \int_{\mathbb{R}} u'(x)\overline{v'}(x)\, dx - 2\sum_{j=1}^{N} \lambda_j u(x_j)\overline{v(x_j)}.$$

Область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ оператора $\mathcal{A}$ имеет следующий вид

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{f : f \in W_2^1(\mathbb{R}),\ f \in W_2^2(-\infty, x_1],\ f \in W_2^2[x_N, +\infty),$$

$$\forall j = 1, \ldots, N-1\ f \in W_2^2[x_j, x_{j+1}],\ \forall j = 1, \ldots, N\ [f']_{x_j-0}^{x_j+0} = -2\lambda_j f(x_j)\}$$

(здесь, через $[f']_{x_j-0}^{x_j+0}$ обозначен скачок f' в точке x_j).
Оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R})$ и для $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ и $x \neq x_j$ при всех $j = 1, \ldots, N$ выполнено

$$(\mathcal{A}f)(x) = -f''(x).$$

Нас будет интересовать только случай, когда в спектре оператора $\mathcal{A}$ имеется хотя бы одно отрицательное собственное значение. В случае $N = 1$ это было эквивалентно условию $\lambda > 0$. В случае $N > 1$ необходимое и достаточное условие состоит в том, что квадратичная форма принимает отрицательные значения т.е. существует функция $u \in W_2^1(\mathbb{R})$, такая что

$$a[u,u] = \int_{\mathbb{R}} |u'(x)|^2\,dx - 2\sum_{j=1}^{N} \lambda_j |u(x_j)|^2 < 0.$$

Достаточное условие наличия отрицательного спектра

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j > 0.$$

У оператора $\mathcal{A}$ может появиться не более n отрицательных с.з., где n это число непоглощающих источников. Так как $\mathcal{A}$ – обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка, его отрицательные с.з. – простые.

Найдем эти собственные значения и отвечающие им собственные функции. В отличие от случая $N = 1$, эти собственные значения не могут быть найдены явно, а только как решения некоторого уравнения. Итак, обозначим через γ положительный корень из модуля неизвестного отрицательного собственного значения и выпишем уравнение, которому удовлетворяет γ.
Так как потенциал оператора $\mathcal{A}$ сосредоточен только в конечном числе точек, вне этих точек, то есть на каждом из интервалов

$$(-\infty, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_N, \infty),$$

неизвестная собственная функция f должна удовлетворять уравнению $-f'' + \gamma^2 f = 0$. Общее решение этого уравнения имеет вид $ce^{\gamma x} + de^{-\gamma x}$, где c, d – произвольные постоянные.

Неизвестную собственную функцию нужно искать в следующем виде

$$f(x) = \begin{cases} c_0 e^{\gamma x} + d_0 e^{-\gamma x} & \text{при } x \in (-\infty, x_1] \\ c_1 e^{\gamma x} + d_1 e^{-\gamma x} & \text{при } x \in [x_1, x_2] \\ c_2 e^{\gamma x} + d_2 e^{-\gamma x} & \text{при } x \in [x_2, x_3] \\ \dots & \\ c_{N-1} e^{\gamma x} + d_{N-1} e^{-\gamma x} & \text{при } x \in [x_{N-1}, x_N] \\ c_N e^{\gamma x} + d_N e^{-\gamma x} & \text{при } x \in [x_N, \infty). \end{cases}$$

Здесь имеется $2(N+1)$ неизвестных коэффициентов и неизвестна величина γ. Из условия $f \in L_2(\mathbb{R})$ вытекает, что $d_0 = c_N = 0$.

Далее, так как собственная функция определяется с точностью до множителя, то один ненулевой коэффициент мы можем выбрать произвольным образом, именно, положим $c_0 = 1$. Теперь остались неизвестными коэффициенты $c_1, \dots, c_{N-1}$, $d_1, \dots, d_N$ и число γ. Для определения этих $2N$ неизвестных используем условие $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Это даст нам N уравнений из условий непрерывности f в точках $x_1, \dots, x_N$

$$c_{j-1}e^{\gamma x_j} + d_{j-1}e^{-\gamma x_j} = c_j e^{\gamma x_j} + d_j e^{-\gamma x_j}, \text{ где } j = 1, \dots, N,$$

и N уравнений из условий на скачок f' в точках $x_1, \dots, x_N$

$$f'(x_j + 0) - f'(x_j - 0) = -2\lambda_j f(x_j), \text{ где } j = 1, \dots, N.$$

Перепишем уравнения в матричной форме. Получим

$$\begin{pmatrix} e^{\gamma x_j} & e^{-\gamma x_j} \\ \gamma e^{\gamma x_j} & -\gamma e^{-\gamma x_j} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\gamma x_j} & e^{-\gamma x_j} \\ e^{\gamma x_j}(\gamma - 2\lambda_j) & -\gamma e^{-\gamma x_j}(\gamma + 2\lambda_j) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{j-1} \\ d_{j-1} \end{pmatrix}$$

Вычисляя обратную матрицу, получаем

$$\begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{pmatrix} \gamma - \lambda_j & -\lambda_j e^{-2\gamma x_j} \\ \lambda_j e^{2\gamma x_j} & \gamma + \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{j-1} \\ d_{j-1} \end{pmatrix}.$$

Используя начальное условие $c_0 = 1$, $d_0 = 0$, получаем уравнение для определения γ. Обозначим

$$S_j(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma - \lambda_j & -\lambda_j e^{-2\gamma x_j} \\ \lambda_j e^{2\gamma x_j} & \gamma + \lambda_j \end{pmatrix},$$

$$T(\gamma) = S_N(\gamma) S_{N-1}(\gamma) \dots S_1(\gamma).$$

Решая рекуррентное соотношение, получаем

$$\begin{pmatrix} c_N \\ d_N \end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma^N} T(\gamma) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $c_N = 0$, то уравнение для определения γ имеет вид

$$\big(T(\gamma)\big)_{11} = 0.$$

Обозначим через γ_0 наибольшее решение . Через γ_1 обозначим наибольшее из остальных положительных решений или ноль если γ_0 – единственное положительное решение.
Далее, через f_0 обозначим нормированную (т.е. $\|f_0\|_2 = 1$) собственную функцию оператора $\mathcal{A}$, соответствующую собственному значению $-\gamma_0^2$. Функция f_0 является также собственной функцией генератора $-\frac{1}{2}\mathcal{A}_0$, отвечающей собственному значению $\frac{\gamma_0^2}{2}$. Можно показать, что функция f_0 может быть выбрана строго положительной.
Как и выше, рассмотрим спектрально сдвинутое на $\frac{\gamma_0^2}{2}$ случайное блуждание $X_x^{\gamma_0^2/2}(t)$. Генератор $-\frac{1}{2}\mathcal{A}_0$ этого блуждания имеет вид

$$-\frac{1}{2}\mathcal{A}_0 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \delta(x - x_j) - \frac{\gamma_0^2}{2},$$

то есть его правый край спектра совпадает с нулем, а интервал $(\frac{\gamma_1^2 - \gamma_0^2}{2}, 0)$ является его спектральной лакуной.

Рассмотрим для ветвящегося процесса $X_x^{\gamma_0^2/2}(t)$ оператор P^t действующий на меры. На множестве абсолютно непрерывных знакопеременных мер с квадратично суммируемой плотностью действие этого оператора совпадает с действием сопряженного оператора, действующего на плотность меры. Соответственно, $\nu_0(dx) = f_0(x)\,dx$ является инвариантным распределением.

Theorem

Пусть $X_x^{\gamma_0^2/2}(t)$ – ветвящийся винеровский процесс, порождающий полугруппу P^t с генератором $-\frac{1}{2}\mathcal{A}_0$. Пусть ν – абсолютно непрерывная мера с плотностью $q \in L_2(\mathbb{R})$. Тогда для любого $t > 0$ мера νP^t абсолютно непрерывна, а ее плотность q_t удовлетворяет неравенству

$$\|q_t - (q, f_0)f_0\|_2 \leqslant e^{-\frac{t(\gamma_0^2-\gamma_1^2)}{2}}\|q - (q, f_0)f_0\|_2 \leqslant e^{-\frac{t(\gamma_0^2-\gamma_1^2)}{2}}\|q\|_2.$$

Случай $N = 2$. В этом случае корни уравнения, определяющего собственные значения, не могут быть найдены явно, но число положительных корней легко определяется.
Итак, пусть у нас имеется два источника, для определенности в точках 0 и 1. Пусть интенсивность ветвления $\beta(x)$ имеет вид

$$\beta(x) = \lambda\delta(x) + \mu\delta(x-1).$$

В этом случае мы имеем

$$S_1(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma - \lambda & -\lambda \\ \lambda & \gamma + \lambda \end{pmatrix}$$

и

$$S_2(\gamma) = \begin{pmatrix} \gamma - \mu & -\mu e^{-2\gamma} \\ \mu e^{2\gamma} & \gamma + \mu \end{pmatrix}.$$

Уравнение, относительно неизвестной γ, которому удовлетворяют собственные значения имеет вид

$$(T(\gamma))_{11} = (S_2(\gamma) \cdot S_1(\gamma))_{11} = (\gamma - \mu)(\gamma - \lambda) - \lambda \mu e^{-2\gamma} = 0$$

или

$$(\gamma - \mu)(\gamma - \lambda) = \lambda \mu e^{-2\gamma}.$$

Параметры λ и μ входят в симметрично, поэтому мы можем считать, что $\mu \leqslant \lambda$.

1. Если $\mu < 0 < \lambda$ и $\lambda + \mu < 0$ то при $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \geqslant 1$ уравнение не имеет положительных корней, а при $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < 1$ уравнение имеет ровно один положительный корень $\gamma_0 \in (0, \lambda)$.

2. Если $\mu < 0 < \lambda$ и $\lambda + \mu \geqslant 0$ то уравнение имеет ровно один положительный корень $\gamma_0 \in (\frac{\lambda+\mu}{2}, \lambda)$.

3. Если $0 < \mu \leqslant \lambda$ то при $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} \geqslant 2$ уравнение имеет ровно один положительный корень $\gamma_0 > \lambda$, а при $\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} < 2$ уравнение имеет ровно два положительных корня $\gamma_1 < \gamma_0$, при этом $\gamma_0 > \lambda$, $\gamma_1 < \mu$.

4. Если $\mu \leqslant \lambda < 0$ то не имеет положительных корней. Это соответствует случаю, когда оба источника являются поглощающими.