Об одном вязкостном решении уравнения G-теплопроводности в связи с формулой Блэка-Шоулза для модели стохастической волатильности.

Данилова Н.В., Белявский Г.И.

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, МЕХАНИКИ И КОМПЬЮТЕРНЫХ НАУК
ИМ. И.И. ВОРОВИЧА
ЮЖНОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА,

поддержано проектом РНФ 25-11-00094

Дивноморск, июнь 2025 года

1. Модель Блека-Шоулса.
2. Модель Хестона.
3. Модель неопределенной волатильности
4. Модель Блека-Шоулса.

Основная задача и ее обобщения

1. Модель Блэка-Шоулса

$W(t)$-стандартный винеровский процесс на стохастическом базисе:$\langle C[0,T],\ (F_t^W)_{t\geq 0}, F_T^W, P^W \rangle$

Рассматривается уравнение: $dS(t) = \sigma S(t) dW(t)$ с начальным условием $S(0) = S_0$

Требуется вычислить $Y(t) = E\left(f\left(S(T)\right)/F_t^W\right)$, функция $f(x) \geq 0$, и математическое ожидание

$$E\left(f\left(S(T)\right)\right) \text{−конечно}$$

Функция $V(t,x) \in C^{1,2}$ - решение уравнения: $\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0, V(T,x) = f(x) \Leftrightarrow V(t,x) = E_{t,x}\left(f(S_T)\right)$

$$Y(t) = V(t, S(t))$$

А.Н. Ширяев. Броуновское движение. 2025. – Т.2.- 576-603.

2. Модель Хестона

$W(t)=\begin{pmatrix}W_1(t)\\ W_2(t)\end{pmatrix}$-двумерный винеровский процесс с $dW(t)\in N\left(0,\begin{pmatrix}1 & \rho\\ \rho & 1\end{pmatrix}dt\right)$

Рассматривается уравнение: $dS(t)=\sqrt{X(t)}S(t)dW_1(t)$

$$dX(t)=a\big(A-X(t)\big)dt+b\sqrt{X(t)}dW_2(t)$$

с начальными условиями $S(0)=S_0, X(0)=X_0$

Требуется вычислить $Y(t)=E\Big(f\big(S(T)\big)/F_t^W\Big)$

Функция $V(t,x,y)\in C^{1,2,2}$ - решение уравнения $\frac{\partial V}{\partial t}+a(A-y)\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{1}{2}\Big(yx^2\frac{\partial^2 V}{\partial^2 x}+2b\rho xy\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}+$ $b^2y\frac{\partial^2 V}{\partial^2 y}\Big)=0, V(T,x,y)=f(x)\Leftrightarrow V(t,x,y)=E_{t,x,y}\big(f(S_T)\big)$

$$Y(t)=V\big(t,S(t),X(t)\big)$$

Steven L. Heston. A closed-form solution for option with stochastic volatility with application to bond and currency options//1993.- V6. – N2. - 327-343

Основная проблема: волатильность является ненаблюдаемой компонентой

Решение проблемы в объединении

{Модель Хестона}∪ {Нелинейная фильтрация}

$$Y(t) = V\big(t, S(t), \pi(t)\big);\ \pi(t) = argmax\varphi(t, y);\ \varphi(t, y)dy = E(I(dy)/F_t^S)$$

Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов./1974.-Наука.-656 стр.

Дискретная модель (Эйлер-Муроямa)

$$R_n = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n};\ R_n = \sqrt{X_n h}\varepsilon_n^1, X_n = \hat{X}_{n-1} + a\big(A - \hat{X}_{n-1}\big)h + \sqrt{\hat{X}_{n-1} h}\varepsilon_n^2,$$

h - шаг по оси времени

Условно-нормальный закон распределения

$$Law\left(\begin{pmatrix} \dfrac{R_n}{\sqrt{X_n h}} \\ \dfrac{X_n - \hat{X}_{n-1} - a\left(A - \hat{X}_{n-1}\right)h}{\sqrt{\hat{X}_{n-1} h}} \end{pmatrix} / \hat{X}_{n-1}\right) = N\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$$

Байесовская оценка

$$\hat{X}_n = arg\min_y \left[\frac{R_n^2}{y} + 2\rho \frac{R_n\left(y - \hat{X}_{n-1} - a\left(A - \hat{X}_{n-1}\right)h\right)}{\sqrt{y\hat{X}_{n-1}}} + \frac{\left(y - \hat{X}_{n-1} - a\left(A - \hat{X}_{n-1}\right)h\right)^2}{\hat{X}_{n-1}}\right]$$

Дискретная модель (условно гауссовские распределения)

$$S_n = S_{n-1}\left(1 + \sqrt{X_{n-1}h}\varepsilon_n^1\right),\ X_n = X_{n-1} + a(A - X_{n-1})h + b\sqrt{X_{n-1}h}\ \varepsilon_n^2$$

Требуется вычислить $Y(n) = E\left(f\left(S(N)\right)/F_n^{\varepsilon}\right)$

Рекуррентные уравнения(Формула Тейлора второго порядка):

$$V(n,x,y) = V(n+1,x,y) + a(A-y)hV_y(n+1,x,y) + \frac{x^2yh}{2}V_{x,x}(n+1,x,y) + \rho byhV_{x,y}(n+1,x,y) + \frac{b^2yh}{2}V_{y,y}(n+1,x,y)$$

$$Y(n) = \mathrm{V}\left(n, S_n, \hat{X}_n\ \right)$$

Апостериорная модель

Рассматриваются банахово пространство ограниченных функций $l_\infty([0,T])$, вероятностное пространство$\langle l_\infty, \mathcal{B}(l_\infty), \mathcal{P}\rangle$

$\sum \subset l_\infty : \Sigma_t = \{x \in R^+ : \exists(\sigma \in \Sigma) \wedge (\sigma(t) = x)\}$ $-$ компакт для всякого $t \in [0,T]$

На основе любой вероятностной меры $P \in \mathcal{P}$

можно определить меру $P_\Sigma(A) = \begin{cases} P(A \cdot \Sigma)/\,P(\Sigma), \text{если } P(\Sigma) \neq 0 \\ 0, \text{если } P(\Sigma) = 0 \end{cases}$,

$\mathcal{P}_\Sigma$-семейство таких мер

Рассмотрим независимые случайные процессы, каждый определен на своем стохастическом базисе $\langle C[0,T],\ (F_t^W)_{t\geq 0}, F_T^W, P^W\rangle$ и $\langle l^\infty[0,T],\ (F_t^X)_{t\geq 0}, F_T^X, \mathcal{P}_\Sigma\rangle$

Уравнение

$$dS(t) = X(t)S(t)dW(t)$$

Данный процесс является мартингалом по отношению к фильтрации $(F_t^W \times F_t^X)_{t\geq 0}$ и любой меры из $P^W \times \mathcal{P}_\Sigma$ поскольку выполнено условие Новикова

Надо вычислить субмартингал

$$Y(t) = \underset{Q\in P^W \times \mathcal{P}_\Sigma}{Sup} E_Q f(S_T/F_t^W).$$

Пусть $M(t)$ – верхняя огибающая, $m(t)$ - нижняя огибающая. семейства срезов Σ_t. Пусть $\langle [\, m(t), M(t)], \mathcal{B}([\, m(t), M(t)]), \mathcal{P}(t)\rangle$

Для вычисления субмартингала $Y(t)$ используем уравнение Якоби – Беллмана-Гамильтона

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{x^2}{2} \sup_{p\in\mathcal{P}(t)} E \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \sigma^2 = 0$$

которое преобразуется в нелинейное уравнение теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{x^2}{2}\left[\frac{M^2(t)-m^2(t)}{2}\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right| + \frac{M^2(t)+m^2(t)}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right] = 0$$ с крайним условием $V(T,x) = f(x)$

Если $f(x)$ -непрерывная функция, то существует единственное вязкостное решение уравнения: $V(t,x)$.

M.Crandall, H. Ishii, P.Lions. User's guide to the viscosity solution of second order particle differential equation // Appeared in bulletin of the American mathematical society. 1992. v.27.N1. 1-67

Субмартингал

$$Y(t) = V(t,x)$$

Теорема. Если крайнее условие $f(x)$ -непрерывная и выпуклая функция, то

решение нелинейного уравнения теплопроводности – выпуклая функция, удовлетворяющая линейному уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{x^2 M^2(t)}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0$$

Схема доказательства. Сначала рассматривается дискретная модель, возникающая в результате разбиения интервала $[0,T]$ на N одинаковых частей:

$S_n^N = S_{n-1}^N \left(1 + \sqrt{\frac{T}{N}} X_{n-1}^N \varepsilon_n\right)$, ε_n- независимые радемахеровские случайные величины

(S^N- дискретная версия процесса S; X^N - дискретная версия процесса X)

Затем для этой модели рассматривается последовательность функций $V_n^M(x) = \max_{m_n^N \le X_n^N \le M_n^N, \ldots, m_N^N \le X_N^N \le M_N^N} E(f(S_N^N)/\ S_n^N = x)$, для которой определяется рекуррентное

уравнение $V_n^N(x) = \max_{m_n^N \le y \le M_n^N} E\ \ V_{n+1}^N\left(x\left(1 + y\sqrt{\frac{T}{N}}\varepsilon_n\right)\right)$, $V_N^N(x) = f(x)$.

Методом индукции назад доказывается, что последовательность $V_n^N(x)$ – последовательность выпуклых функций.

Применение формулы Тейлора второго порядка позволяет записать приближенное уравнение для данной последовательности

$$\tilde{V}_n^M(x) = \tilde{V}_{n+1}^M(x) + \frac{T}{2N} \max_{m_n^N \le y \le M_n^N} y^2 \left(\tilde{V}_{n+1}^M(x)\right)''_{x,x} = \tilde{V}_{n+1}^M(x) +$$
$$\frac{T}{2N}\left[\frac{\left(M_n^N\right)^2-\left(m_n^N\right)^2}{2}\left|\left(\tilde{V}_{n+1}^M(x)\right)''_{x,x}\right| + \frac{\left(M_n^N\right)^2+\left(m_n^N\right)^2}{2}\left(\tilde{V}_{n+1}^M(x)\right)''_{x,x}\right]. \ \tilde{V}_n^M(x) = f(x)$$

Определим полунепрерывные справа кусочно-постоянные функции:

$\tilde{V}^N(t,x) = \tilde{V}_{n-1}^N(x),\ (n-1)\frac{T}{N} \le t < n\frac{T}{N};\ V^N(t,x) = V_{n-1}^N(x),\ (n-1)\frac{T}{N} \le t < n\frac{T}{N}$

Первая – приближенное решение уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, поэтому $\lim_{N\to\infty} \tilde{V}^N(t,x) = V(t,x)$, для произвольного x

Для второй $\lim_{N\to\infty}\left(V^N(t,x) - \tilde{V}^N(t,x)\right) = 0$, для произвольного x. Поэтому для второй

$$\lim_{N\to\infty} V^N(t,x) = V(t,x)$$

G.Barles,P.Saganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations// 1991.- Asymptotic Analysis 4. – 271-283

$$f(x) = max(x,0), M(t) = \sigma^a, m(t) = \sigma^d$$

Справедливая цена:

$$S_0\Phi\left(\frac{ln\frac{S_0}{K}+\frac{T(\sigma^a)^2}{2}}{\sigma^a\sqrt{T}}\right) - K\Phi\left(\frac{ln\frac{S_0}{K}-\frac{T(\sigma^a)^2}{2}}{\sigma^a\sqrt{T}}\right) \le C \le S_0\Phi\left(\frac{ln\frac{S_0}{K}+\frac{T\left(\sigma^b\right)^2}{2}}{\sigma^b\sqrt{T}}\right) - K\Phi\left(\frac{ln\frac{S_0}{K}-\frac{T\left(\sigma^b\right)^2}{2}}{\sigma^b\sqrt{T}}\right)$$