Моделирование опционов кэп и флор на RUONIA и ключевую ставку Банка России

Фарвазова Айсылу Азатовна

МКСМ-10

Кафедре теории вероятностей — 90 лет

01-06 июня 2025 г.

пос. Дивноморское, г. Геленджик, Россия

Содержание

Введение: мотивировка работы, общая постановка

§ 1 Параметризация кривой волатильности моделью SABR для нормального случая

§ 2 Ценообразование кэплетов и флорлетов с помощью модели Hull-White

§ 3 Калибровка параметра a модели Hull-White, численные примеры и альтернативное моделирование

Заключение, список литературы и благодарность

Мотивировка

В настоящее время Банк России перешел от политики управления валютным курсом к политике управления инфляцией. Чтобы сдерживать инфляцию фокус внимания ЦБ сосредоточен на ключевой ставке. Еще более актуальным стал вопрос управления процентным риском — риском изменения финансовых результатов компании в случае колебания процентных ставок в экономике. Чтобы реализовать механизмы управления процентным риском стал естественным вопрос запуска новых инструментов на Московской бирже — кэп, флор и коллар.

Работа посвящена моделированию ценообразования опционов кэп и флор на ключевую ставку с арифметическим усреднением и на RUONIA, которая вычисляется как сложная процентная ставка.

Определение

- Ключевая ставка Банка России — основной инструмент денежно-кредитной политики Банка России. Совет директоров задаёт уровень ключевой ставки 8 раз в год (на 4 "опорных" ежеквартальных заседаниях и на 4 промежуточных). Играет информационно-сигнальную роль и характеризует направленность денежно-кредитной политики: жесткая или мягкая. Публикуется пресс-релиз о ключевой ставке; после "опорных" заседаний публикуется еще "Доклад о денежно-кредитной политике", и Председатель Банка России выступает на пресс-конференции, комментирует принятое решение и отвечает на вопросы журналистов.
- Ставка RUONIA (Ruble Overnight Index Average) — взвешенная процентная ставка однодневных межбанковских кредитов (депозитов) в рублях, отражающая оценку стоимости необеспеченного заимствования на условиях овернайт. Рассчитывается по данным отчетности крупнейших кредитных организаций по форме "Отчет об операциях на валютных и денежных рынках", представляемой кредитными организациями в Банк России. Относится к безрисковым эталонным процентным индикаторам, используется при мониторинге и анализе эффективности достижения операционной цели денежно-кредитной политики Банка России. Администратором RUONIA с 2020 г. является Банк России, который отвечает за все этапы этого процесса, включая методику RUONIA, формирование перечня банков-участников, сбор данных, расчет и публикацию процентной ставки.

Общая постановка

Пусть t_0 – момент оценивания, $T = [T_\alpha, T_{\alpha+1}, ..., T_\beta]$ – моменты выплат, а $\tau = [\tau_{\alpha+1}, ..., \tau_\beta]$ – соответствующие периоды, N – номинал, K – страйк, $\sigma_{\alpha,\beta}$ – волатильность на промежутке $[T_\alpha, T_\beta]$. Тогда

$$Cap(t_0, T, \tau, N, K, \sigma_{\alpha,\beta}) = N \sum_{j=\alpha+1}^{\beta} P(t_0, T_j)\tau_j \cdot Caplet(K, F(t_0, T_{j-1}, T_j), v_j),$$

где $v_j = \sigma_{\alpha,\beta}\sqrt{T_j}$, $P(t_0, T_j)$ – дисконт-фактор. Приведенная стоимость инструмента флор вычисляется аналогично как сумма флорлетов. Инструмент коллар – линейная комбинация кэпов и флоров.

Замечание. Стоимость кэплета/флорлета эквивалентна стоимости колл-, пут-опциона на дисконтную облигацию номиналом $1 + K\tau_j$ и страйком $\frac{1}{1+K\tau_j}$. Флорлет можем вычислить по формуле для пут-опциона или по пут-колл паритету: $P = C - DF \cdot (F - K)$.

Ставки с арифметическим усреднением и сложные процентные ставки

- Ставка с арифметическим усреднением:

$$A(T_{j-1}, T_j) = \frac{1}{T_j - T_{j-1}} \sum_{k=1}^{n} r(t_{j_k}) \simeq \frac{1}{\tau_j} \int_{T_{j-1}}^{T_j} r(u)du,$$

- Сложная процентная ставка:

$$R(T_{j-1}, T_j) = \frac{1}{\tau_j} \left[\prod_{k=1}^{n} (1+\tau_{j_k} r(t_{j_k})) - 1 \right] \simeq \frac{1}{\tau_j} \left[\exp\left(\int_{T_{j-1}}^{T_j} r(u)du \right) - 1 \right].$$

Здесь $r(t_{j_k})$ – overnight ставка в $t_{j_{k-1}}$, ассоциированная с τ_{j_k}.
Видно, что если $r \sim Norm$, то $A \sim Norm$, а $R \sim logNorm$.

Backward-looking vs forward-looking типы ставок

Для $t \le T_j$ введем обозначение $A(t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_j}}[A(T_{j-1}, T_j) \,|\, \mathcal{F}_t]$, где $\mathbb{Q}_{T_j}$ – T_j-форвард мера (L. Andersen and V. Piterbarg, "Interest Rate Modelling", in three volumes, 2010, Atlantic Financial Press). *Payoff* в момент времени T_j для

1) *Backward-looking* кэплета: $V^b_{cplt}(T_j) = (A(T_j) - K)^+$,

2) *Forward-looking* кэплета: $V^f_{cplt}(T_j) = (A(T_{j-1}) - K)^+$.

Для $t \le T_j$ имеем $V^b_{cplt}(t) = P(t, T_j)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_j}}[(A(T_j) - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t]$ и
$V^f_{cplt}(t) = P(t, T_j)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_j}}[(A(T_{j-1}) - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t]$.

Цена *backward-looking* кэплета не меньше, чем *forward-looking*:

$$V^f_{cplt}(t) \le P(t, T_j)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_j}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_j}}[(A(T_j) - K)^+ \,|\, \mathcal{F}_{T_{j-1}}] \,|\, \mathcal{F}_t] = V^b_{cplt}(t)$$

по неравенству Йенсена для $t \le T_{j-1}$.

§1.1 Параметризация кривой волатильности

SABR – *Stochastic Alpha Beta Rho*:

$$\begin{cases} dA(t) = \sigma(t)A(t)^{\beta}dW^1(t), \\ d\sigma(t) = \alpha\sigma(t)dW^2(t), \\ dW^1(t)dW^2(t) = \rho dt, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $\beta \in [0,1]$, $\rho \in [-1,1]$, $\sigma(0) = \sigma_0$ и $\sigma_0 > 0$. Здесь $A(t)$ – мартингал относительно T_j-форвардной меры $\mathbb{Q}^{T_j}$, $W^1(t), W^2(t)$ – $\mathbb{Q}^{T_j}$-Броуновские движения.

Нормальный случай $\beta = 0$.

§1.2 Параметризация кривой волатильности моделью SABR для нормального случая

Асимптотическое выражение для подразумеваемой нормальной волатильности, $\varepsilon = \alpha T^2 \ll 1$, $F_0 \neq K$:

$$\sigma^{Bachelier}_{implied,\,Hagan}(\alpha, \beta = 0, \rho, \sigma_0, K, T) = \alpha \frac{F_0 - K}{D(\zeta)} \cdot \Big\{ 1 + \Big[A + B + C \Big] \cdot \varepsilon \Big\},$$

$$\zeta = \frac{\alpha}{(1-\beta)\sigma_0}(F_0^{1-\beta} - K^{1-\beta}), \quad D(\zeta) = \log\left(\frac{\sqrt{1-2\rho\zeta+\zeta^2}+\zeta-\rho}{1-\rho} \right),$$

$$\gamma_1 = \frac{\beta}{F_{mid}}, \quad \gamma_2 = -\frac{\beta(1-\beta)}{(F_{mid})^2}, \quad F_{mid} = \frac{F_0+K}{2},$$

$$A = \frac{2\gamma_2-\gamma_1^2}{24} \cdot \left(\frac{\sigma_0 F_{mid}^{\beta}}{\alpha} \right)^2, \quad B = \frac{\rho\gamma_1}{4} \cdot \frac{\sigma_0 F_{mid}^{\beta}}{\alpha}, \quad C = \frac{2-3\rho^2}{24}.$$

При моделировании $\varepsilon = 1$, $F_0 = F_{ATM}$; $F_0 = K$: $\frac{F_0-K}{D(\zeta)} = 1$, $K \to F_0$.
Результат калибровки волатильности SABR: $(\alpha_{opt}, \rho_{opt}, \sigma_{0\ opt})$.

§1.3 Параметризация кривой волатильности: forward-looking SABR vs backward-looking SABR

В работе [4] говорится, что для forward-looking кэплетов можно использовать стандартную параметризацию SABR'а из [2] $(\alpha_{opt}, \rho_{opt}, \sigma_{0\ opt})$. *Динамический backward-looking SABR* модель [4]:

$$
\begin{cases}
dA(t) = \psi(t)\sigma(t)A(t)^{\beta}dW^1(t), \quad \psi(t) = \min\left(1, \frac{T_j - t}{T_j - T_{j-1}}\right)^q, \\
d\sigma(t) = \alpha\sigma(t)dW^2(t), \\
dW^1(t)dW^2(t) = \rho dt.
\end{cases}
$$

Параметр $q > 0$ описывает насколько быстро уменьшается волатильность. Показывается связь между a – скорость возврата к среднему в модели HW.

В [4] приводятся формулы для коэффициентов $(\hat{\alpha}_{opt}, \hat{\rho}_{opt}, \hat{\sigma}_{0\ opt})$.

Для нормального случая ($\beta = 0$ модели Башелье) можно аналогично получить.

§2.1 Модель Hull-White

Пусть краткосрочная процентная ставка $r(t)$ удовлетворяет динамике *однофакторной модели Hull-White* [1], $\mathbb{Q}$ – риск-нейтральная мера:

$$dr(t) = \big(\theta(t) - ar(t)\big)dt + \sigma dW(t),$$

где $\theta(t)$ – функция по времени, параметр a – скорость возврата к среднему, σ – волатильность $r(t)$ и σ, a – положительные константы. Функция $\theta(t)$:

$$\theta(t) = \frac{\partial F^M(0,t)}{\partial T} + aF^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}),$$

где $F^M(0,t)$ – мгновенная рыночная форвардная ставка в момент времени 0 и

$$F^M(0,T) = \frac{\partial P^M(0,T)}{\partial T},$$

где $P^M(0,T)$ – рыночный фактор дисконтирования для T.

§2.2 Ценообразование кэплетов и флорлетов с помощью модели Hull-White

Теорема. Формула для ценообразования кэплета в случае арифметического усреднения базовой ставки с помощью модели Hull-White [1, 3], где $t_0 \le T_{j-1} < T_j$ и t_0 – дата оценивания опциона, T_{j-1} – дата начала действия опциона, T_j – дата экспирации опциона:

$$C_{AA}^{HW}(t_0, A_j(t_0), K, T_{j-1}, T_j) = \frac{P(t_0, T_j)}{\tau_j}\Big(\tau_j\big(A_j(t_0) - K\big)N(d) + \sigma\sqrt{T(a, t_0, T_{j-1}, T_j)}\phi(d)\Big), \quad (1)$$

$\tau_j = (T_j - T_{j-1})/365$, K – страйк, $P(t_0, T_j)$ – дисконт-фактор, $A_j(t_0)$ – форвард в момент времени t_0, $\sigma = \hat{\sigma}_{implied}^{normSABR}(K, t_0, T_{j-1}, T_j)$ [2, 4], $\sigma^2 T(a, t_0, T_{j-1}, T_j)$ – вариация, $d = \frac{\tau_j(A_j(t_0) - K)}{\sigma\sqrt{T(a, t_0, T_{j-1}, T_j)}}$, $N(\cdot)$, $\phi(\cdot)$ – функция и плотность распределения стандартной нормальной величины, параметр калибровки a – скорость возврата к среднему.

§2.3 Ценообразование кэплетов и флорлетов с помощью модели Hull-White

В формуле (1) теоремы имеют место следующие равенства [3]:

$$\sigma^2 T(a, t_0, T_{j-1}, T_j) = \frac{\sigma^2}{2a} B(T_{j-1}, T_j)\left[1 - e^{-2a(T_{j-1}-t_0)}\right] + V(T_{j-1}, T_j),$$

$$\tau_j A_j(t_0) = \tau_j \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_j}}\left[A(T_{j-1}, T_j) \,|\, \mathcal{F}_{t_0}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_j}}\left[\int_{T_{j-1}}^{T_j} r(u)du \,|\, \mathcal{F}_{t_0}\right] = -B(T_{j-1}, T_j)\cdot$$

$$\cdot M^{T_j}(t_0, T_{j-1}) - V(T_{j-1}, T_j) + \log\frac{P(t_0, T_{j-1})}{P(t_0, T_j)} + \frac{1}{2}\left(V(t_0, T_j) - V(t_0, T_{j-1})\right),$$

где для случая $t_0 \le s \le t \le T$ имеем $B(s, t) = \frac{1-e^{-a(t-s)}}{a}$,

$$V(s, t) = \frac{\sigma^2}{2a^3}\left\{2a(t-s) - 3 + 4e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)}\right\},$$

$$M^T(s, t) = \frac{\sigma^2}{a^2}\left[1 - e^{-a(t-s)}\right] - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-s+t-s)}\right].$$

§3.1 Калибровка параметра a модели Hull-White

Калибруется примерно ~ 1 раз в квартал (частота калибровки связана с динамикой ключевой ставки). Правая граница $b > 0$ во время калибровки параметра a определяется экспертным путем как риск-параметр.

Значение параметра a может быть определено калибровкой модели по наблюдаемым на рынке ценам кэплетов/флорлетов. Целевая функция для минимизации — сумма квадратов относительных ошибок:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\mathbf{Caplet}_i^{HW}-\mathbf{Caplet}_i^{mkt}}{\mathbf{Caplet}_i^{mkt}}\right)^2+\left(\frac{\mathbf{Floorlet}_i^{HW}-\mathbf{Floorlet}_i^{mkt}}{\mathbf{Floorlet}_i^{mkt}}\right)^2 \to \min_{a,\ 0<a\leq b},$$

где n – число калибруемых кэплетов/флорлетов с одинаковыми входными параметрами для i-го: K, t_0, T_{j-1} и T_j.

§3.2 Численные примеры

Upfront цена — это Running цена, домноженное на τ_j и $P(t_0, T_j)$.
Running цены для $t_0 =$ '2025/03/11', $a = 3.0$ (Type — это T_j и T_{j-1}; Floorlet цены по put-call паритету, $DF_i^{mkt} = 1.0$):

$Type$	$Strike_i$	Fwd_i^{mkt}	σ_i^{mkt}	$\hat{\sigma}_i^{Bchl,\,d}$	$Cplt_i^{mkt}$	$Flt_{i,\,pcp}^{mkt}$	$Cplt_i^{HW}$	$Flt_{i,\,pcp}^{HW}$
1m3m	17	20.5637	3.99886	0.17916	3.62530	0.06160	3.62159	0.29062
3m3m	16	19.7608	4.01267	0.20358	3.88509	0.12428	3.84370	0.44119
6m3m	14	18.3010	4.11540	0.20470	4.49971	0.19876	4.35468	0.63303
9m3m	13	16.7464	3.91571	0.22359	4.10039	0.35400	3.87424	0.76011
12m3m	10	14.0744	3.87718	0.22928	4.47970	0.40532	4.18001	0.94438
2y3m	8	12.3367	3.40315	0.20962	4.89915	0.56249	4.39358	1.36798

§3.3 Альтернативное моделирование: forward-looking кэплеты

По формуле Башелье для (форвардных) Европейских опционов пут и колл имеем:

$$V_{call} = (F-K)\cdot N\Big(\frac{F-K}{\sigma\sqrt{T}}\Big) - \sigma\sqrt{T}\cdot n\Big(\frac{F-K}{\sigma\sqrt{T}}\Big),$$

$$V_{put} = V_{call} + K - F,$$

где F – форвард в момент времени t_0, K – страйк, $T = (T_{j-1} - t_0)/365$ – тенор в годах (здесь важно рассматривать T_{j-1}, поскольку forward-looking кэплет), $\sigma = \sigma^{normSABR}_{implied}(K,T)$ – параметризация волатильности, N, n – функции распределения и плотности стандартной нормальной величины. Для *backward-looking* кэплетов рассматриваем $T = (T_j - t_0)/365$ и $\sigma = \hat{\sigma}^{normSABR}_{implied}(K,T)$ по аналогии с [4] для нормального Башелье ($\beta = 0$) случая.

Заключение

Разработана модель ценообразования для:

1) *backward-looking* кэплетов — модель Блэка для сложных процентных ставок и Башелье для ставок с арифметическим усреднением с параметрами модели Hull-White,

2) *forward-looking* кэплетов — модель Башелье для процентных ставок с арифметическим усреднением,

с аналитически вычисляемой волатильностью — модель SABR
(без методов Монте-Карло, все вычисления в online-режиме).

Работа носит практический характер и может быть полезной при моделировании ценообразования процентных опционов в финансовых организациях.

Литература

[1] *Brigo Damiano, Fabio Mercurio* Interest rate models theory and practice with smile, inflation and credit. // Springer finance, 2^{nd} ed., Berlin, 2006.

[2] *Patrick Hagan, Deep Kumar, Andrew Lesniewski, Diana Woodward* Managing smile risk. // Wilmott, №1, pp. 84–108, 2002.

[3] *Takahiro Hasegawa* Caplet Formulae for Backward-Looking Term Rates with Hull-White Model. // Working paper, 2021.

[4] *Sander Willems* SABR smiles for RFR caplets. // Risk.net, 2021.

Слова благодарности

Работа выполнена при поддержке Группы Московская биржа[1]. Автор благодарит своих коллег, а также трейдеров и квантов IR-деска SberCIB GM за ценные комментария и обсуждения, в том числе Гайрата Александра – ученика доктора физико-математических наук профессора Малышева Вадима Александровича, основателя и заведующего лабораторией Больших случайных систем при кафедре теории вероятностей.

[1] Мнения, высказанные в этой работе, принадлежат ее автору и не обязательно отражают взгляды и политику Московской биржи или любой другой организации.

Благодарим за внимание!