Об одном свойстве моментов скачков неоднородного процесса Пуассона с периодической интенсивностью

А.В. Зорин

ORCID: 0000-0003-3214-7384 email: andrei.zorine@itmm.unn.ru

ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Россия, г. Н.Новгород, пр. Гагарина, 23

03 июня 2025 • ICSM-10

LOBACHEVSKY UNIVERSITY

Вступление

С момента открытия университета в Нижнем Новгороде в 1916 году в учебных планах экономического факультета и физико-математического факультета присутствовали статистические дисциплины, включающие разделы по теории вероятностей. В первые годы лекции читали приглашенные лекторы из Москвы. Позднее лекции стали читать преподаватели самого университета.

К 1980 г. в нескольких подразделениях Горьковского государственного университета сформировались группы математиков, которые углубленно изучали теорию вероятностей и математическую статистику, активно разрабатывали некоторые разделы этих разделов математики.
На механико-математическом факультете это была возглавляемая И.С. Доброхотовым группа сотрудников кафедры математической физики В.В. Агеев, В.А. Зорин, М.С. Тихов, Ю.С. Хохлов и др.

В НИИ ПМК в этом направлении работала группа М.А. Федоткина — Г.Г. Ильин, В.И.Мухин, Н.М.Голышева, Е.В.Кувыкина и др.

LOBACHEVSKY UNIVERSITY

Вступление (прод.)

Впервые вопрос о создании кафедры прикладной теории вероятностей и лаборатории в Горьковском госуниверситете был поставлен А.Н. Колмогоровым, Ю.В. Прохоровым, Б.В. Гнеденко в декабре 1983 года в Звенигороде на заседании секции теории вероятностей и математической статистики отделения математики АН СССР. На защите в МГУ докторской диссертации М.А. Федоткиным в 1984 году эти академики и главный оппонент этой работы академик В.С. Королюк поддержали эту идею.

В 1985 года в Совет Горьковского госуниверситета (ГГУ) поступили письменные рекомендации отдела теории вероятностей Математического института им. В.А. Стеклова, трех кафедр Московского госуниверситета о целесообразности открытия кафедры прикладной теории вероятностей (ПТВ). Эти рекомендации были подписаны А.Н. Колмогоровым, Ю.В. Прохоровым, Б.В. Гнеденко и направлены в администрацию ГГУ. Межфакультетская кафедра ПТВ в ГГУ была открыта 18 августа 1986 года во исполнение приказа Минвуза РСФСР от 11 июня 1986 года № 386

В 2021 г. кафедре получила наименование “теории вероятностей и анализа данных”.

Статистические задачи для неоднородного процесса Пуассона

Пусть $\{N(t); t \geqslant 0\}$ — неоднородный пуассоновский процесс.
Пусть

$$\Lambda(t) = \mathbb{E}\,N(t) = \int_0^t \lambda(u)\,du, \tag{1}$$

$$\lambda(t) \geqslant 0, \qquad \lambda(1+t) = \lambda(t) \qquad \text{для всех } t \geqslant 0 \tag{2}$$

Возникают следующие задачи (не обязательно в предлоположении о периодичности):

- Оценка неизвестной ведущей функции $\Lambda(\cdot)$
- Оценка неизвестной функции интенсивности $\lambda(\cdot)$
- Проверка гипотез о виде $\lambda(\cdot)$ или $\Lambda(\cdot)$.

LOBACHEVSKY UNIVERSITY

Статистические задачи для неоднородного процесса Пуассона (прод.)

1. Dox D.R., Lewis P.A.W. *The statistical analysis of series of events*. New York: John Wiley, 1966.
   Гипотезы об однородности, гипотезы линейного роста интенсивности.
2. Бакиров Н.К., Сначев М.В. *Тест: растет ли интенсивность потока заявок в СМО?* // Уфимский математический журнал. **2**:3, 17-30 (2010).
   Гипотезы о квадратичном росте интенсивности
3. Ramlau-Hansen H. *Smoothing counting process intensities by means of kernel functions* // The Annals of Statistics. **11**:2, 453-466 (1983)
   Diggle P. *A kernel method for smoothing point process data* // Applied Statistics. **34**:2, 138-147 (1985)
   Ядерные оценки интенсивности

Статистические задачи для неоднородного процесса Пуассона (прод.)

4. Flaxman S., Teh Y.W., Sejdnovic D. Poisson intensity estimation with reproducing kernels // Proceedings of the 20th International Conference on Artificial Intelligence and Statistics, PMLR, 2017. P. 270-279.
   Оценка интенсивности с помощью методов теории гильбертовых пространств с воспроизводящим ядром
5. Ибрагимов И.А. *Одна задача оценки плотности интенсивности пуассоновского процесса* // Записки научных семинаров ПОМИ. **474**, 139–148 (2018)
   Оценка мгновенной интенсивности методами асимптотического анализа
6. Kutoyants Yu. Introduction to the statistics of Poisson processes and applications. Springer, 2023.
   Обширная монография, много всего и в плане задач оценивания, и в плане проверки гипотез согласия

LOBACHEVSKY UNIVERSITY

Моменты скачков

Введем следующие связанные с ним случайные величины:

- T_n — момент n-го скачка
- $X_n = \{T_n\}$ — «фаза» n-го скачка
- $M_n = [T_n - T_{n-1}]$ — целое число периодов между скачками

Будем считать в дальнейшем, что $\lambda(t) \geqslant \delta > 0$ для некоторого δ (интенсивность отделена от нуля).

Известно, что

$$\mathbb{P}(T_{n+1} - T_n > t \mid T_1, T_2, \dots, T_n) = \exp\Big\{-\int_{T_n}^{T_n+t} \lambda(u)\,du\Big\}, \qquad t \geqslant 0.$$

С учетом периодичности интенсивности,

$$\exp\Big\{-\int_{T_n}^{T_n+t} \lambda(u)\,du\Big\} = \exp\Big\{-\int_{\{T_n\}}^{\{T_n\}+t} \lambda(u)\,du\Big\}$$

Моменты скачков (прод.)

Теорема 1.

Последовательность $X_n = \{T_n\}$, $n = 0,\ 1,\ \ldots$ является возвратной по Харрису общей цепью Маркова с переходной плотностью

$$p(u,v) = \begin{cases} \dfrac{\lambda(v)\exp\{-(\Lambda(1+v)-\Lambda(u))\}}{1-e^{-\Lambda(1)}} & \text{при } 0 \leqslant v \leqslant u \leqslant 1, \\[2ex] \dfrac{\lambda(v)\exp\{-(\Lambda(v)-\Lambda(u))\}}{1-e^{-\Lambda(1)}} & \text{при } 0 \leqslant u < v \leqslant 1. \end{cases} \tag{3}$$

Тогда стационарное распределение цепи Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ имеет плотность $\lambda(u)/\Lambda(1)$, $0 \leqslant u \leqslant 1$.

Моменты скачков (прод.)

Переходная вероятность: для $u < v$, равенства

$$\{T_n\} = u \quad \text{и} \quad v \leqslant \{T_{n+1}\} < v + dv$$

означают, что разность $T_{n+1} - T_n$ может принимать значения из промежутков

$$[v - u, v + dv - u), \; [1 + v - u, 1 + v + dv - u), \; [2 + v - u, 2 + v + dv - u), \; \ldots .$$

Поэтому,

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in [v, v + dv) \mid X_n = u) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\exp\left\{ - \int_u^{u+m+(v-u)} \lambda(u)\, du \right\} - \exp\left\{ - \int_u^{u+m+(v-u)+dv} \lambda(u)\, du \right\} \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \exp\{-m\Lambda(1)\}\left(1 - \exp\left\{-\int_v^{v+dv} \lambda(u)\, du\right\}\right) =$$

$$= (1 - e^{-\Lambda(1)})^{-1}\left(1 - \exp\left\{-\int_v^{v+dv} \lambda(u)\, du\right\}\right). \quad (4)$$

При $u > v$ исключается случай $m = 0$. Остальные вычисления аналогичны.

Вид стационарной плотности устанавливается прямой подстановкой функции $\pi(u) = \lambda(u)/\Lambda(1)$ в уравнение

$$\pi(u) = \int_0^1 \pi(v) p(v, u).$$

Очевидно, в любое множество из $[0, 1]$ положительной меры Лебега цепь попадает с положительной вероятностью за один шаг.

Моменты скачков (прод.)

Возвратность по Харрису

Цепь $\{\Phi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ со значениями в фазовом пространстве $(E, \mathcal{E})$ называется *возвратной по Харрису*, если она ψ-неприводима и

$$\mathbb{P}(\{\Phi_n \in A \quad \text{б.ч.}\} \mid \Phi_0 = x) = 1$$

для *всех* $x \in E$ и всякого множества A с $\psi(A) > 0$.
Здесь $\psi(\cdot)$ — максимальная из таких мер $\phi(\cdot)$ на $(E, \mathcal{E})$, что для всякого $A \in \mathcal{E}$ с $\phi(A) > 0$

$$\mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{\Phi_n \in A\} \mid \Phi_0 = x) > 0.$$

Данное свойство потребуется для ЦПТ (подробности ниже).

LOBACHEVSKY UNIVERSITY

Возможные применения

- (Непараметрическое) оценивание неизвестной интенсивности $\lambda(t)$.
- Проверка гипотезы о согласии с данной функцией интенсивности $\lambda(u)$ (варианты критерием Колмогорова, ω^2, Пирсона и т.д.)
- Проверка сложной гипотезы о принадлежности процесса семейству простых (с постоянной интенсивностью, $\lambda(u)/\Lambda(1) = 1$).

Основное отличие от имеющихся в литературе методов: вместо наблюдения части считающего процесса $\{N(t); 0 \leqslant t \leqslant T\}$ наблюдается фиксированное число моментов скачков $\{T_i; i = 1, 2, \ldots, n\}$.

Оценивание неизвестной интенсивности

Неизвестная интенсивность $\lambda(t)$ лишь масштабным множителем отличается о стационарной плотности для цепи Маркова $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$. Стационарную плотность можно оценивать любыми доступными средствами (гистограмма или эмпирическая плотность, ядерное оценивание и т.д.).
Для определения нормирующей константы $\Lambda(1)$ заметим, что

$$\mathbb{P}(M_n = m \mid \{T_{n-1} = t\}) = \mathbb{P}(t \leqslant T_n - T_{n-1} < t + 1 \mid \{T_{n-1} = t\}) =$$
$$= \exp\Big\{-\int_t^{t+m} \lambda(v)\,dv\Big\} - \exp\Big\{-\int_t^{t+m+1} \lambda(v)\,dv\Big\} = e^{-m\Lambda(1)}(1 - e^{-\Lambda(1)}). \quad (5)$$

Достаточно оценить параметр геометрического распределения: пусть дана выборка m_1, m_2, ..., m_n, положим $\overline{m} = (m_1 + \ldots + m_n)/n$, тогда по методу моментов

$$\widehat{\Lambda(1)} = \ln(1 + \overline{m}) - \ln(\overline{m}). \quad (6)$$

LOBACHEVSKY UNIVERSITY

Оценивание неизвестной интенсивности (прод.)

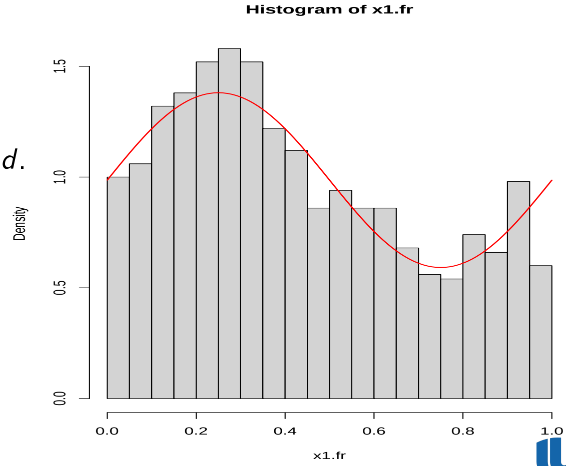
Пример.

Пусть

$$\lambda(t) = d + a\sin(2\pi t),\ \text{где } d > 0,\ |a| < d.$$

На рисунке представлены отношение $\lambda(t)/\widehat{\Lambda(1)}$ (черная линия) и эмпирическая плотность (гистограмма) .

Оценка строилась по выборке объема $n = 1000$.

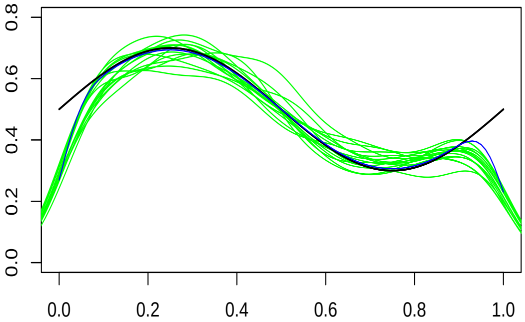


Пример.

Пусть

$$\lambda(t) = d + a\sin(2\pi t), \text{ где } d > 0, \ |a| < d.$$

На рисунке представлены истинная интенсивность (черная линия) и 15 оценок с помощью ядерной оценки плотности с гауссовским ядром.



Оценка строилась по выборке объема $n = 1000$.

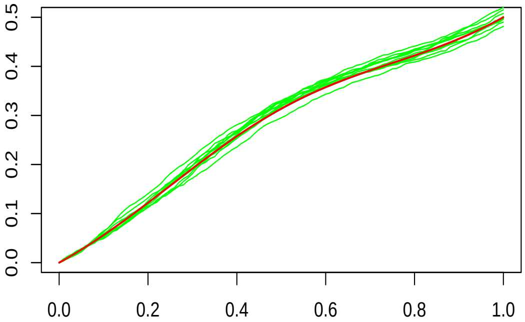
Оценивание неизвестной интенсивности (прод.)

Пример.

Пусть

$$\lambda(t) = d + a\sin(2\pi t), \text{ где } d > 0,\ |a| < d.$$

На рисунке представлены истинная ведущая функция $\Lambda(t)$ интенсивность (черная линия) и 10 оценок на основе выборочной функции распределения.



Оценка строилась по выборке объема $n = 1000$.

Критерии согласия

Теорема 2.

Пусть даны натуральное r и точки $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_r = 1$. Введем обозначение

$$\Delta_j = \frac{\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})}{\Lambda(1)} . \tag{7}$$

Рассмотрим эмпирический процесс

$$w_n(t) = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(X_i < t) - \frac{\Lambda(t)}{\Lambda(1)}\right), \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{8}$$

Критерии согласия (прод.)

Тогда распределение вектора

$$(w_n(t_1) - w_n(t_0), w_n(t_2) - w_n(t_1), \dots, w_n(t_r) - w_n(t_{r-1})) \tag{9}$$

сходится при $n \to \infty$ к r-мерному нормальному распределению с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей $\Sigma = (\sigma_{j,k})_{j,k=\overline{1,n}}$, в которой

$$\sigma_{j,j} = \Delta_j(1 - \Delta_j)$$
$$\sigma_{j,k} = -\Delta_j\Delta_k, \qquad j \neq k.$$

LOBACHEVSKY UNIVERSITY

Критерии согласия (прод.)

Следствие.

Пусть дана выборка X_1, X_2, ..., X_n (определены выше). Обозначим

$$\nu_j = \frac{\Lambda(1)}{n} \sum_{i=1}^{n} I(t_{j-1} \leqslant X_i < t_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{10}$$

Тогда статистика

$$\frac{n}{\Lambda(1)} \sum_{j=1}^{r} \frac{(\nu_j - (\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})))^2}{\Lambda(t_j) - \Lambda(t_{j-1})} \tag{11}$$

при $n \to \infty$ сходится по распределению к χ^2_{r-1}.

Критерии согласия (прод.)

Для проверки гипотезы

$$H_0\colon \lambda(u) = \lambda_0(u), \quad 0 \leqslant u < 1$$

против альтернативы

$$H_1\colon \lambda(u) \neq \lambda_0(u)$$

можно пользоваться критерием хи-квадрат Пирсона.

Для критерия Колмогорова необходимо предположить, что цепь $\{X_n; n = 0, 1, \ldots\}$ является стационарной, тогда справедливость соответствующей функциональной ЦПТ следует из книги Биллигсли.

Очерк доказательства теоремы 2.

Доказательство основывается на ЦПТ для цепи Маркова с общим пространством состояний.

Пусть $P(x, B)$ — переходное ядро на фазовом пространстве $(E, \mathcal{E})$. Пусть $\pi(\cdot)$ — инвариантное распределение вероятностей на $(E, \mathcal{E})$ для $P(\cdot, \cdot)$. Пусть $f\colon E \to \mathbb{R}$ — некоторая функция.

Уравнение

$$g(x) - \int_E g(y) P(x, dy) = f(x) - \int_E f(y) \pi(dy) \tag{12}$$

называется уравнением Пуассона.

Следующая теорема является адаптацией из книги: Meyn S., Tweedie R.L. Markov Chains and Stochastic Stability. 2nd ed., Теорема 17.4.4.

Очерк доказательства теоремы 2. (прод.)

ЦПТ для общей ЦМ

Пусть $\{\Phi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ — возвратная по Харрису цепь Маркова с переходным ядром $P(\cdot,\cdot)$ и инвариантным распределением вероятностей $\pi(\cdot)$, а функция $f : E \to \mathbb{R}$ такова, что решение $g(\cdot)$ соответствующего уравнения Пуассона (12) существует и $\int_E g^2(y)\pi(dy) < \infty$. Если постоянная

$$\gamma_f^2 = \int_E \left(g^2(x) - \left(\int_E g(y)P(x, dy) \right)^2 \right) \pi(dx) \tag{13}$$

строго положительна, тогда

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\Phi_i) - \int_E f(y)\pi(dy)\right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \gamma_f^2) \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Очерк доказательства теоремы 2. (прод.)

Стандартным приемом получается обобщение на многомерный случай: пусть цепь Маркова $\{\Phi_n; n = 0, 1, \ldots\}$ как в предыдущей теореме, и пусть даны функции $f_1(\cdot)$, $f_2(\cdot)$, $\ldots$, $f_r(\cdot)$ из E в $\mathbb{R}$. Пусть $g_j(\cdot)$ — решение уравнения Пуассона для $f_j(\cdot)$.
Тогда

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_1(\Phi_i) - \int_E f_1(y)\pi(dy) \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_2(\Phi_i) - \int_E f_2(y)\pi(dy) \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1} f_r(\Phi_i) - \int_E f_r(y)\pi(dy) \end{pmatrix} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma),$$

Очерк доказательства теоремы 2. (прод.)

где элементы матрицы $\Sigma = (\sigma_{j,k})_{j,k=\overline{1,r}}$ суть

$$\sigma_{j,j} = \int_E \left(g_j^2(x) - \left(\int_E g_j(y) P(x, dy) \right)^2 \right) \pi(dx)$$

$$\sigma_{j,k} = \int_E \left(g_j(x) g_k(x) - \left(\int_E g_j(y) P(x, dy) \right) \left(\int_E g_k(y) P(x, dy) \right) \right) \pi(dx), \quad j \neq k.$$

Очерк доказательства теоремы 2. (прод.)

Лемма.

Решение $g_j(\cdot)$ уравнения Пуассона

$$g_j(u) = I(z_{j-1} \leqslant u < z_j) - \Delta_j + \int_0^1 p(u,v) g_j(v)\, dv, \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1.$$

имеет вид

$$g_j(u) = \begin{cases} \Delta_j \Lambda(u) & \text{при } 0 \leqslant u < z_{j-1}, \\ \Lambda(u)(\Delta_j - 1) + 1 + \Lambda(z_{j-1}) & \text{при } z_{j-1} \leqslant u < z_j, \\ (\Lambda(u) - \Lambda(1))\Delta_j & \text{при } z_j \leqslant u \leqslant 1. \end{cases}$$

Используя явный вид решений уравнений Пуассона и вид предельной ковариационной матрицы из многомерной ЦПТ для цепи Маркова, после алгебраических преобразований получаем утверждение Теоремы 2.

Другие критерии согласия

Условия теоремы 2 влекут также сходимость конечномерных распределений процесса $w_n(G(u))$, где $G(u)$ — обратная к $\Lambda(t)/\Lambda(1)$, к конечномерным распределениям броуновского моста. Однако для доказательство слабой сходимости нужно установить *плотность* семейства распределений.
Схема доказательства изложена в книге Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977 для конечных цепей Маркова (стационарность, φ-перемешивание, экспоненциальное убывание φ_n)

Спасибо за внимание!

Вопросы?