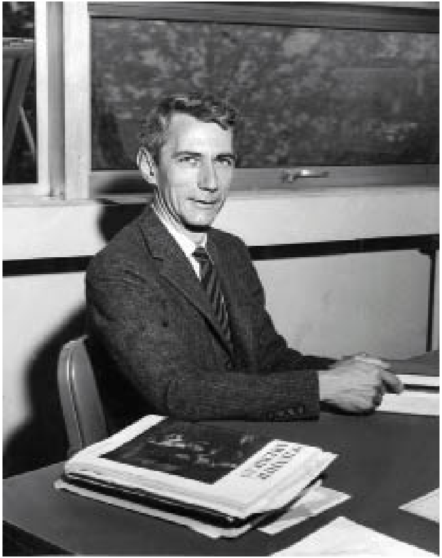
О максимизации множества ε-типичных последовательностей марковского источника особого типа

Кондратенко А.Е., Октысюк К.Д., Соболев В.Н., Фролов А.А.

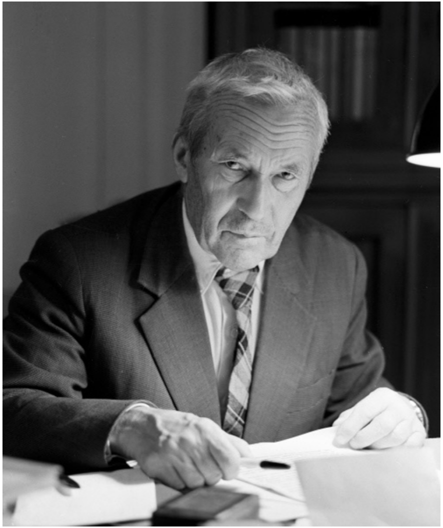
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова
Дивноморское

3 июня 2025

Клод Элвуд Шеннон (1916 – 2001), США



Андрей Николаевич Колмогоров (1903 – 1987), СССР



Информация случайного события

$$\mathrm{P}(A) < \mathrm{P}(B) \Rightarrow \mathrm{I}_A > \mathrm{I}_B$$

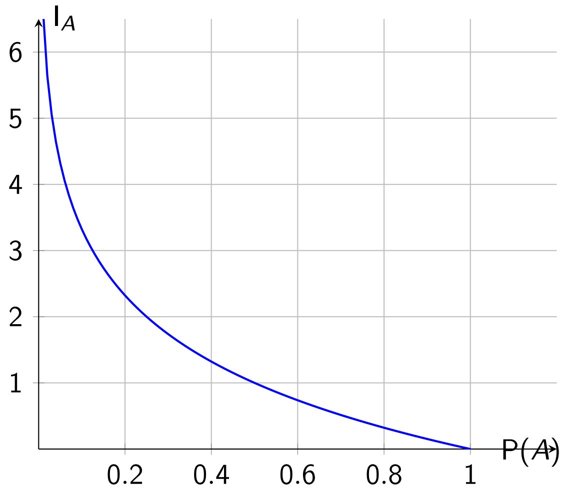
$$\mathrm{P}(B) = 1 \Rightarrow \mathrm{I}_B = 0$$

$$\mathrm{P}(A) = 0 \Rightarrow \mathrm{I}_A = \infty$$

Определение

$$\mathrm{I}_A \doteqdot -\log_2 \mathrm{P}(A)$$

Информация случайного события



Энтропия случайной величины

Рассмотрим дискретную случайную величину ξ, принимающую конечное число значений

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{I}_k = \mathsf{I}(\xi = x_k) = -\log_2 p_k, \;\; k = \overline{1, n}$$

Для определения информации, которую несет случайная величина ξ, введем вспомогательную случайную величину

$$\mathsf{I}\,\xi \overset{\Sigma}{\sim} \begin{pmatrix} \mathsf{I}_1 & \dots & \mathsf{I}_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Энтропия случайной величины

Определение

$$\mathrm{H}\,\xi \doteqdot \mathrm{M}\,\mathrm{I}\,\xi = \sum_{k=1}^{n} I_k p_k = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k$$

$$\mathrm{H}\,\xi = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k = \mathrm{H}(p_1, \ldots, p_n)$$

$$\mathrm{H}\,\xi^n = \mathrm{H}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \doteqdot -\sum_{k_1,\ldots,k_n} p_{k_1,\ldots,k_n} \cdot \log_2 p_{k_1,\ldots,k_n}$$

Замечание

1. $$\mathrm{h}(p) \doteqdot \mathrm{H}(p, 1-p) = -p\log_2 p - (1-p)\log_2(1-p);$$
2. $$\max_{p_1,\ldots,p_n} \mathrm{H}(p_1, \ldots, p_n) = \mathrm{H}(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) = \log_2 n$$

Александр Яковлевич Хинчин (1894 – 1959), СССР

Энтропия источника

Определение

Энтропией на одну букву k-буквенного сообщения называется

$$H_k \doteqdot \frac{1}{k} H(\xi_1, \ldots, \xi_k)$$

Определение

Энтропией источника называется

$$H_\infty \doteqdot \lim_{k \to \infty} H_k$$

Определение

Источник обладает свойством *асимптотической равнораспределенности*, если у него существует энтропия H_∞ и множество $\mathcal{A}^n$ допускает такое разбиение $\mathcal{A}^n = \mathcal{A}_{n,\varepsilon} \sqcup \mathcal{A}'_{n,\varepsilon}$, что для любых $\varepsilon, \delta > 0$ и достаточно больших n выполнено

1. для всех $a^n \in \mathcal{A}_{n,\varepsilon}$
$$\left| \frac{1}{n} \mathrm{I}(a^n) - \mathrm{H}_\infty \right| \leqslant \varepsilon$$
2. $$P_{1,2,\dots,n}(\mathcal{A}'_{n,\varepsilon}) = \sum_{a^n \in \mathcal{A}'_{n,\varepsilon}} P_{1,2,\dots,n}(a^n) \leqslant \delta$$

Информационный аналог ЗБЧ

Рассмотрим $\zeta_n = \frac{1}{n}\,\mathsf{I}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $n = 1, 2, \ldots,$ $\zeta = \mathsf{H}_\infty$. Тогда по определению свойства асимптотической равнораспределенности $\mathcal{A}_{n,\varepsilon}$ является подмножеством события $\{|\zeta_n - \zeta| \leqslant \varepsilon\}$ и выполнено неравенство

$$\mathsf{P}\left(|\zeta_n - \zeta| > \varepsilon\right) \leqslant \delta$$

Выполнение свойства асимптотической равнораспределенности равносильно

$$\frac{1}{n}\,\mathsf{I}(\xi_1, \ldots, \xi_n) \xrightarrow{\mathsf{P}} \mathsf{H}_\infty$$

Теорема

Пусть $(\mathcal{A}, \vec{p}, \mathbb{P})$– стационарный простой двоичный марковский источник.

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Тогда

$$\mathsf{H}_\infty = \frac{1}{1+\alpha}\,\mathsf{h}(\alpha),$$

$$\max_\alpha \mathsf{H}_\infty(\alpha) = \mathsf{H}_\infty(1 - \frac{1}{\phi}),$$

где $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение.

При $0 < \alpha < 1$ источник регулярен, так как

$$\mathbb{P}^2 = \begin{pmatrix} \alpha + (1-\alpha)^2 & \alpha(1-\alpha) \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix} > 0$$

Стационарным распределением является

$$\vec{p} = \left(\frac{1}{1+\alpha}, \ \frac{\alpha}{1+\alpha} \right)$$

Мощность множества "хороших" слов

Источник обладает свойством асимптотической равнораспределенности и для всех $\varepsilon > 0,\ 0 < \delta < \frac{1}{2}$

$$\frac{1-\delta}{2^{n\cdot\varepsilon}} \cdot \phi^n \leqslant |A_{n,\varepsilon}| \leqslant 2^{n\cdot\varepsilon}\phi,$$

$$(2^{-\varepsilon} \cdot \phi^{-1})^n \leqslant \mathsf{P}_{1,2,\ldots,n}(a^n) \leqslant (2^{\varepsilon} \cdot \phi^{-1})^n \text{ для всех } a^n \in A_{n,\varepsilon},$$

где $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ – золотое сечение.

Список литературы

1. *Чечета С.И.* Введение в дискретную теорию информации и кодирования // МЦМНО, М., 2011, 224 с.
2. *Заец М.В., Кондратенко А.Е.* Задачи по теории информации и кодирования: примеры и решения // ООО “МАКС Пресс”, М., 2022, 9 с.
3. *Кондратенко А.Е., Соболев В.Н.* О максимизации энтропии при свертке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки. — 2022. — Т. 37, № 1 — с. 7-11.

Комментарий

Рассмотрим пример, поясняющий использование обозначения

$$\mathsf{I}\,\xi \overset{\Sigma}{\sim} \begin{pmatrix} \mathsf{I}_1 & \dots & \mathsf{I}_n \\ p_1 & \dots & p_n \end{pmatrix}$$

Рассмотрим случайную величину ξ

$$\xi \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix};\ \xi^2 \overset{\Sigma}{\sim} \begin{pmatrix} (-1)^2 & 0^2 & 1^2 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix};\xi^2 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p_2 & p_1 + p_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathsf{M}\,\xi = (-1)\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 1\cdot p_3;\ \mathsf{M}\,\xi^2 = (-1)^2\cdot p_1 + 0^2\cdot p_2 + 1^2\cdot p_3;\ \mathsf{M}\,\xi^2 = 0\cdot p_1 + 1\cdot(p_1 + p_2)$$

ИКСИ

"Секретная"случайная величина $I\xi$ ("и кси")
ИКСИ - институт криптографии связи и информатики