О минимальном суммарном случайном весе k непересекающихся остовных деревьев

Д. А. Шабанов

МФТИ, МГУ, ВШЭ

X Конференция по стохастическим методам
04.06.2025

Random assignment problem

Пусть $M = (m_{ij} : i, j = 1, \ldots, n) \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой являются независимыми $\mathrm{Exp}(1)$ случайными величинами. Пусть S_n — группа перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим

$$T_n = \min_{\sigma \in S_n} \left(m_{1\sigma(1)} + \ldots + m_{n\sigma(n)} \right)$$

— минимальный суммарный вес сопоставления столбцов и строк.

Random assignment problem

Пусть $M = (m_{ij} : i, j = 1, \ldots, n) \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой являются независимыми $\mathrm{Exp}(1)$ случайными величинами. Пусть S_n — группа перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим

$$T_n = \min_{\sigma \in S_n} \left(m_{1\sigma(1)} + \ldots + m_{n\sigma(n)} \right)$$

— минимальный суммарный вес сопоставления столбцов и строк.

Вопрос: чему равно $\mathrm{E}T_n$?

Random assignment problem

Пусть $M = (m_{ij} : i, j = 1, \ldots, n) \in \mathrm{Mat}(n \times n)$ — матрица размера $n \times n$, элементы которой являются независимыми $\mathrm{Exp}(1)$ случайными величинами. Пусть S_n — группа перестановок чисел $\{1, 2, \ldots, n\}$. Рассмотрим

$$T_n = \min_{\sigma \in S_n} \left(m_{1\sigma(1)} + \ldots + m_{n\sigma(n)} \right)$$

— минимальный суммарный вес сопоставления столбцов и строк.

Вопрос: чему равно $\mathsf{E}T_n$?

Гипотеза (Дж. Паризи, 1998)

$$\mathsf{E}T_n = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Random assignment problem

Теорема (Д. Олдос, 2000)

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E} T_n = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Random assignment problem

Теорема (Д. Олдос, 2000)

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}T_n = \zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Теорема (С. Линуссон, Й. Вастлунд, 2004; Ч. Нейр, Б. Прабхакар, М. Шарма, 2005)

Гипотеза Паризи верна

$$\mathsf{E}T_n = 1 + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Минимальный вес остовного дерева

Пусть $K_n = (V_n, E_n)$ — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны случайные веса $(w_e, e \in E_n)$, являющимися положительными н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Для каждого остовного дерева T определим его вес как сумму весов входящих в него ребер:

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w_e.$$

Минимальный вес остовного дерева

Пусть $K_n = (V_n, E_n)$ — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны случайные веса $(w_e, e \in E_n)$, являющимися положительными н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Для каждого остовного дерева T определим его вес как сумму весов входящих в него ребер:

$$w(T) = \sum_{e \in E(T)} w_e.$$

Рассмотрим минимальный вес остовных деревьев K_n:

$$mst_F(K_n) = \min_T w(T).$$

Вопрос: чему равно $\mathsf{E}[mst_F(K_n)]$?

Минимальный вес остовного дерева

Теорема (А. Фриз, 1985)

Если $a = F'(0) \in (0, \infty)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[mst_F(K_n)] = \frac{\zeta(3)}{a} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.$$

Минимальный вес остовного дерева

Теорема (А. Фриз, 1985)

Если $a = F'(0) \in (0, \infty)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[mst_F(K_n)] = \frac{\zeta(3)}{a} = \frac{1}{a}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}.$$

Теорема (К. Купер, А. Фриз, Н. Инс, С. Янсон, Дж. Спенсер, 2013)

Если F *— это функция распределения* $\mathrm{U}(0,1)$, *то*

$$\mathsf{E}[mst_F(K_n)] = \zeta(3) + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^{4/3}} + o(n^{-4/3}).$$

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

1. Отсортируем все ребра графа по возрастанию весов: $e_1, e_2, \ldots, e_N$.

Алгоритм Краскала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

1. Отсортируем все ребра графа по возрастанию весов: $e_1, e_2, \ldots, e_N$.
2. Рассматриваем ребра в получившемся порядке. Пусть E_i — уже набранный на шаге i набор ребер.

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

1. Отсортируем все ребра графа по возрастанию весов: $e_1, e_2, \ldots, e_N$.
2. Рассматриваем ребра в получившемся порядке. Пусть E_i — уже набранный на шаге i набор ребер.
3. Если ребро e_{i+1} соединяет две разных компоненты связности графа $G_i = (V, E_i)$, то добавляем его в набор $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$. Иначе, пропускаем его.

Алгоритм Крускала

С алгоритмической точки зрения поиск минимального веса остовного дерева в произвольном (связном) графе $G = (V, E)$ с приписанными весами ребер является простым. Имеется быстрый алгоритм, который набирает минимальное по весу остовное дерево.

1. Отсортируем все ребра графа по возрастанию весов: $e_1, e_2, \dots, e_N$.
2. Рассматриваем ребра в получившемся порядке. Пусть E_i — уже набранный на шаге i набор ребер.
3. Если ребро e_{i+1} соединяет две разных компоненты связности графа $G_i = (V, E_i)$, то добавляем его в набор $E_{i+1} = E_i \cup \{e_{i+1}\}$. Иначе, пропускаем его.
4. Получившийся в конце набор ребер E_N будет образовывать минимальное по весу остовное дерево в графе G.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

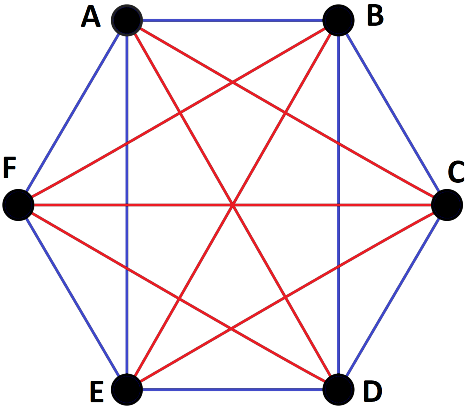

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$$
\begin{array}{lll}
w_{CD} = 0.06 & w_{EF} = 0.11 & w_{AC} = 0.14 \\
w_{BE} = 0.19 & w_{BF} = 0.22 & w_{CF} = 0.25 \\
w_{DF} = 0.33 & w_{BC} = 0.39 & w_{AB} = 0.47 \\
w_{DE} = 0.61 & w_{AD} = 0.68 & w_{CE} = 0.74 \\
w_{AF} = 0.79 & w_{BD} = 0.88 & w_{AE} = 0.93
\end{array}
$$

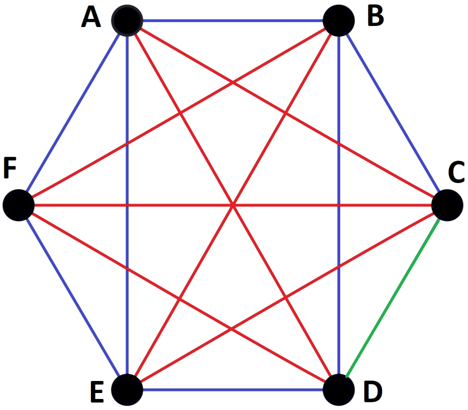

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$$
\begin{array}{lll}
w_{CD} = 0.06 & w_{EF} = 0.11 & w_{AC} = 0.14 \\
w_{BE} = 0.19 & w_{BF} = 0.22 & w_{CF} = 0.25 \\
w_{DF} = 0.33 & w_{BC} = 0.39 & w_{AB} = 0.47 \\
w_{DE} = 0.61 & w_{AD} = 0.68 & w_{CE} = 0.74 \\
w_{AF} = 0.79 & w_{BD} = 0.88 & w_{AE} = 0.93
\end{array}
$$

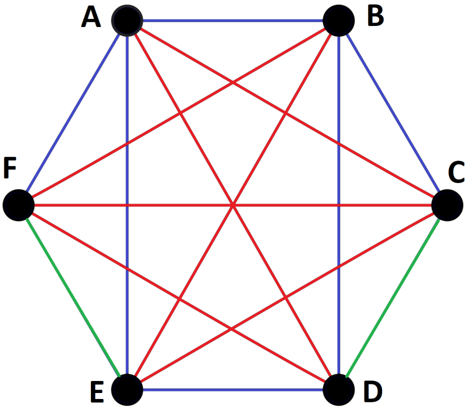

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$$
\begin{array}{lll}
w_{CD} = 0.06 & w_{EF} = 0.11 & w_{AC} = 0.14 \\
w_{BE} = 0.19 & w_{BF} = 0.22 & w_{CF} = 0.25 \\
w_{DF} = 0.33 & w_{BC} = 0.39 & w_{AB} = 0.47 \\
w_{DE} = 0.61 & w_{AD} = 0.68 & w_{CE} = 0.74 \\
w_{AF} = 0.79 & w_{BD} = 0.88 & w_{AE} = 0.93
\end{array}
$$

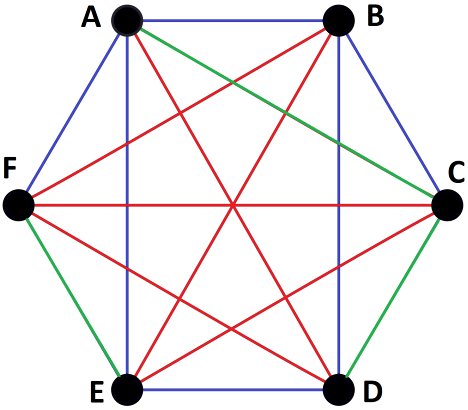

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$w_{CD} = 0.06$	$w_{EF} = 0.11$	$w_{AC} = 0.14$
$w_{BE} = 0.19$	$w_{BF} = 0.22$	$w_{CF} = 0.25$
$w_{DF} = 0.33$	$w_{BC} = 0.39$	$w_{AB} = 0.47$
$w_{DE} = 0.61$	$w_{AD} = 0.68$	$w_{CE} = 0.74$
$w_{AF} = 0.79$	$w_{BD} = 0.88$	$w_{AE} = 0.93$

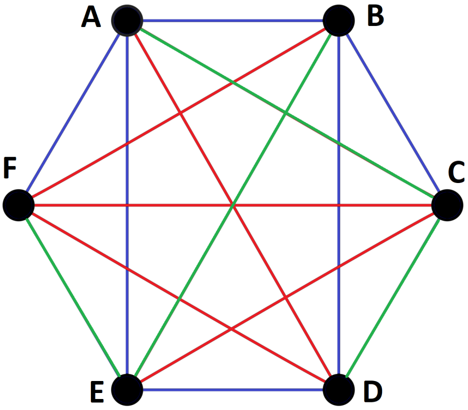

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$$
\begin{array}{lll}
w_{CD} = 0.06 & w_{EF} = 0.11 & w_{AC} = 0.14 \\
w_{BE} = 0.19 & w_{BF} = 0.22 & w_{CF} = 0.25 \\
w_{DF} = 0.33 & w_{BC} = 0.39 & w_{AB} = 0.47 \\
w_{DE} = 0.61 & w_{AD} = 0.68 & w_{CE} = 0.74 \\
w_{AF} = 0.79 & w_{BD} = 0.88 & w_{AE} = 0.93
\end{array}
$$

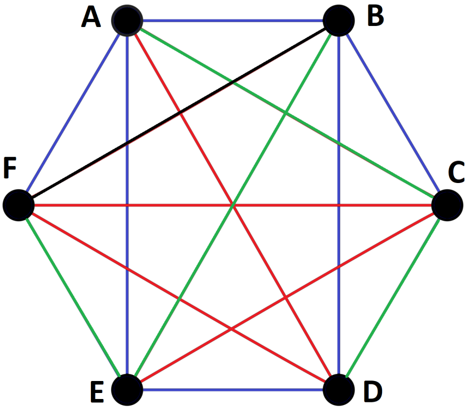

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$$
\begin{array}{lll}
w_{CD} = 0.06 & w_{EF} = 0.11 & w_{AC} = 0.14 \\
w_{BE} = 0.19 & w_{BF} = 0.22 & w_{CF} = 0.25 \\
w_{DF} = 0.33 & w_{BC} = 0.39 & w_{AB} = 0.47 \\
w_{DE} = 0.61 & w_{AD} = 0.68 & w_{CE} = 0.74 \\
w_{AF} = 0.79 & w_{BD} = 0.88 & w_{AE} = 0.93
\end{array}
$$

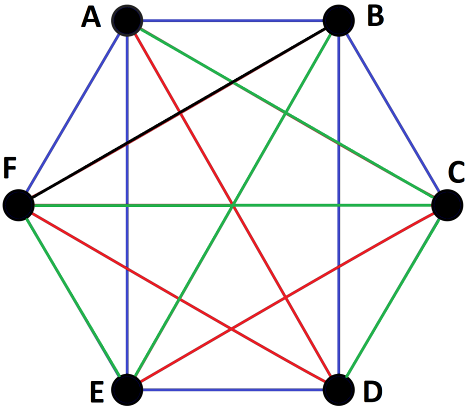

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Пример

Заданные веса ребер:

$$
\begin{array}{lll}
w_{CD} = 0.06 & w_{EF} = 0.11 & w_{AC} = 0.14 \\
w_{BE} = 0.19 & w_{BF} = 0.22 & w_{CF} = 0.25 \\
w_{DF} = 0.33 & w_{BC} = 0.39 & w_{AB} = 0.47 \\
w_{DE} = 0.61 & w_{AD} = 0.68 & w_{CE} = 0.74 \\
w_{AF} = 0.79 & w_{BD} = 0.88 & w_{AE} = 0.93
\end{array}
$$

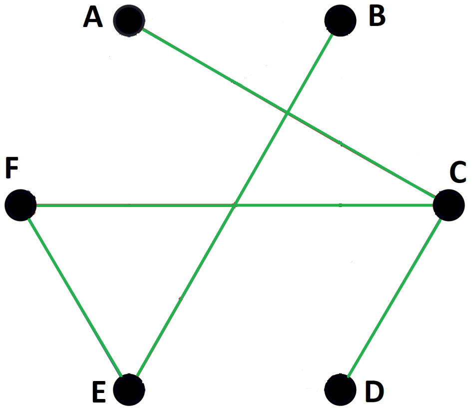

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер?

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер? В силу симметрии модели это будет случайный подграф K_n с равномерным распределением на всех подграфах с m ребрами, т.е. классическая равномерная модель Эрдеша–Реньи $G(n, m)$.

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер? В силу симметрии модели это будет случайный подграф K_n с равномерным распределением на всех подграфах с m ребрами, т.е. классическая равномерная модель Эрдеша–Реньи $G(n, m)$.Из теории случайных графов известно, что

- Пока m невелико ($< n/2$) вероятность того, что мы добавим e_m в набор, будет равна $1 - o(1)$.

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер? В силу симметрии модели это будет случайный подграф K_n с равномерным распределением на всех подграфах с m ребрами, т.е. классическая равномерная модель Эрдеша–Реньи $G(n, m)$.Из теории случайных графов известно, что

- Пока m невелико ($< n/2$) вероятность того, что мы добавим e_m в набор, будет равна $1 - o(1)$.
- При $m > n \ln n$ случайный граф $G(n, m)$ связен с вероятностью $1 - o(1)$, а потому алгоритм к этому времени с большой вероятностью закончит свою работу.

Случайные графы

Запустим алгоритм Крускала на полном графе K_n со случайными весами. Что образуют первые по списку m ребер? В силу симметрии модели это будет случайный подграф K_n с равномерным распределением на всех подграфах с m ребрами, т.е. классическая равномерная модель Эрдеша–Реньи $G(n,m)$.Из теории случайных графов известно, что

- Пока m невелико $(< n/2)$ вероятность того, что мы добавим e_m в набор, будет равна $1 - o(1)$.
- При $m > n \ln n$ случайный граф $G(n,m)$ связен с вероятностью $1 - o(1)$, а потому алгоритм к этому времени с большой вероятностью закончит свою работу.
- При $m \sim cn/2$ и $c > 1$ в $G(n,m)$ будет единственная гигантская компонента размера $\beta n(1 - o(1))$, где $\beta = \beta(c)$ есть решение уравнения $\beta + e^{-\beta c} = 1$. Следовательно, вероятность того, что мы добавим e_m в набор будет равна $(1 - \beta^2)(1 - o(1))$.

Случайные графы

Подставляя асимптотику математических ожиданий младших порядковых статистик, получаем, что минимальный вес остовного дерева будет в среднем сходиться к

$$\frac{1}{2a}\int\limits_0^\infty x(1-\beta^2(x))dx = \frac{\zeta(3)}{a}.$$

Набор остовных k деревьев

В работе А. Фриза и Т. Йоханссона 2018 года было предложено естественное обобщение данной задачи на случай k остовных деревьев.

Набор остовных k деревьев

В работе А. Фриза и Т. Йоханссона 2018 года было предложено естественное обобщение данной задачи на случай k остовных деревьев.

Пусть снова $K_n = (V_n, E_n)$ — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны случайные веса $(w_e, e \in E_n)$, являющимися положительными н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Для натурального k введем

$$mst_{F,k}(K_n) = \min_{T_1,\ldots,T_k \text{ — непересек.}} \left(w(T_1) + \ldots + w(T_k)\right),$$

т.е. мы ищем сразу несколько попарно непересекающихся по ребрам остовных деревьев и пытаемся минимизировать их суммарный вес.

Набор остовных k деревьев

В работе А. Фриза и Т. Йоханссона 2018 года было предложено естественное обобщение данной задачи на случай k остовных деревьев.

Пусть снова $K_n = (V_n, E_n)$ — полный граф на n вершинах, ребрам которого приписаны случайные веса $(w_e, e \in E_n)$, являющимися положительными н.о.р.с.в. с функцией распределения $F(x)$. Для натурального k введем

$$mst_{F,k}(K_n) = \min_{T_1,\ldots,T_k \text{ — непересек.}} \left(w(T_1) + \ldots + w(T_k)\right),$$

т.е. мы ищем сразу несколько попарно непересекающихся по ребрам остовных деревьев и пытаемся минимизировать их суммарный вес.

Вопрос: чему равно $\mathsf{E}[mst_{F,k}(K_n)]$?

Пример

Заданные веса ребер:

$$\begin{array}{lll} w_{CD} = 0.06 & w_{EF} = 0.11 & w_{AC} = 0.14 \\ w_{BE} = 0.19 & w_{BF} = 0.22 & w_{CF} = 0.25 \\ w_{DF} = 0.33 & w_{BC} = 0.39 & w_{AB} = 0.47 \\ w_{DE} = 0.61 & w_{AD} = 0.68 & w_{CE} = 0.74 \\ w_{AF} = 0.79 & w_{BD} = 0.88 & w_{AE} = 0.93 \end{array}$$

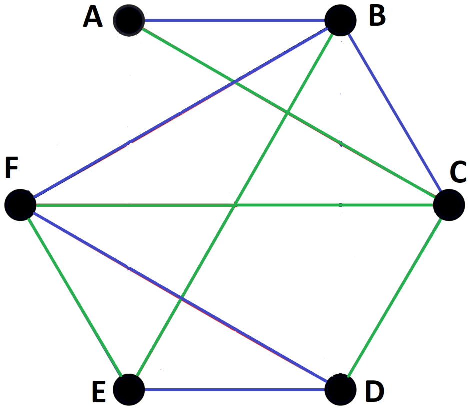

Рис.: Полный граф на 6 вершинах.

Новый результат

Для формулировки результата нам понадобится несколько обозначений.

Новый результат

Для формулировки результата нам понадобится несколько обозначений.

1. Обозначим через c_k положительное решение (относительно c) уравнения

$$c \cdot \frac{\sum\limits_{j \geqslant k-1} \frac{c^j}{j!}}{\sum\limits_{j \geqslant k} \frac{c^j}{j!}} = k.$$

Новый результат

Для формулировки результата нам понадобится несколько обозначений.

1. Обозначим через c_k положительное решение (относительно c) уравнения

$$c \cdot \frac{\sum\limits_{j \geqslant k-1} \frac{c^j}{j!}}{\sum\limits_{j \geqslant k} \frac{c^j}{j!}} = k.$$

2. Для всех $x \leqslant c_k$ положим $\beta_k(x) = 0$. При $x > c_k$ определим $\beta_k(x)$ как решение (относительно β) уравнения

$$\beta = \sum_{j \geqslant k} \frac{(\beta x)^j}{j!} e^{-\beta x}.$$

Новый результат

Теорема (Н. Звонков, Д. Шабанов)

Пусть $k > 1$ фиксировано, а также дана функция распределения $F(x)$ положительной случайной величины, причем $F(x) \sim a \cdot x$ при $x \to 0+$. Пусть ребрам K_n приписаны независимые одинаково распределенные случайные веса с распределением $F(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[mst_{F,k}(K_n)] = \frac{1}{a}\int_0^\infty x\left(1-\beta_k^2(x)\right)dx.$$

Новый результат

Теорема (Н. Звонков, Д. Шабанов)

Пусть $k > 1$ фиксировано, а также дана функция распределения $F(x)$ положительной случайной величины, причем $F(x) \sim a \cdot x$ при $x \to 0+$. Пусть ребрам K_n приписаны независимые одинаково распределенные случайные веса с распределением $F(x)$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{E}[mst_{F,k}(K_n)] = \frac{1}{a}\int\limits_0^\infty x\left(1-\beta_k^2(x)\right)dx.$$

При $k = 2$ данный результат был ранее получен А. Фризом и Т. Йохансcоном.

Ингредиенты доказательства

- Следуя идеям Фриза и Йохансcона, рассматриваются матроиды.

Ингредиенты доказательства

- Следуя идеям Фриза и Йоханссона, рассматриваются матроиды.
- Вместо компонент связности в графе вводятся компоненты *глубокой k-связности*, в которых можно выделить k непересекающихся по ребрам остовных деревьев.

Ингредиенты доказательства

- Следуя идеям Фриза и Йохансcона, рассматриваются матроиды.
- Вместо компонент связности в графе вводятся компоненты *глубокой k-связности*, в которых можно выделить k непересекающихся по ребрам остовных деревьев.
- Параллельно удается доказать аналог теоремы о гигантской компоненте в случайном графе для подобного типа связности. Ее асимптотический размер будет равен (по вероятности) $\beta_k n$.

Ингредиенты доказательства

- Следуя идеям Фриза и Йохансcона, рассматриваются матроиды.
- Вместо компонент связности в графе вводятся компоненты *глубокой k-связности*, в которых можно выделить k непересекающихся по ребрам остовных деревьев.
- Параллельно удается доказать аналог теоремы о гигантской компоненте в случайном графе для подобного типа связности. Ее асимптотический размер будет равен (по вероятности) $\beta_k n$.
- Изучается связь такой компоненты с k-ядром случайного графа.