

Формула для вычисления производных в среднем слева второго порядка

Азарина Светлана Владимировна

КубГУ, Краснодар

5 июня 2025

Немного о гидродинамике

Движение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнением Навье-Стокса, являющимся уравнением Эйлера с дополнительным диффузионным членом. Для двумерного уравнения получены теоремы глобального существования и единственности обобщённых и классических решений. Кровь является несжимаемой, но вязкой жидкостью, поэтому для описания её движения стоит использовать уравнение Навье-Стокса, учитывающее вязкость:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -(v, \nabla v)v - \nabla p + f + \nu \Delta v \quad (1)$$

Распределённая массовая сила f , входящая в это уравнение является причиной движения. Вязкое трение $\nu \Delta v$ замедляет движение.

Лагранжев подход

Конфигурационное пространство идеальной несжимаемой жидкости, заполняющей многообразие M , есть группа Ли всех диффеоморфизмов M , сохраняющих форму объёма. В случае многообразия с краем ∂M группа диффеоморфизмов состоит из тех сохраняющих объём диффеоморфизмов, которые оставляют границу ∂M инвариантной. Алгебра Ли этой группы состоит из бездивергентных векторных полей на M (касающихся границы для многообразия с краем)

Производные в среднем

Процессы $\xi(t)$, $\eta(t)$ заданы на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, принимают значения в $\mathbb{R}^n$, являются L_1 случайными величинами при всех $t \in [0, T]$.

Пусть E_t^η – условное математическое ожидание относительно σ -алгебры, порожденной прообразами борелевских множеств при отображении $\eta(t) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Производной в среднем слева процесса $\xi(t)$ в момент времени t относительно $\eta(t)$ называют L_1 -случайную величину

$$D_*^\eta \xi(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\eta \left(\frac{\xi(t) - \xi(t - \Delta t)}{\Delta t} \right). \quad (2)$$

Пусть $Z(t, x)$ – C^2 -гладкое векторное поле на $\mathbb{R}^n$. Его производной в среднем слева вдоль $\eta(t)$ относительно $\xi(t)$ назовём L_1 случайный процесс

$$D_*^\eta Z(t, \xi(t)) = \lim_{\Delta t \rightarrow +0} E_t^\eta \left(\frac{Z(t, \xi(t)) - Z(t - \Delta t, \xi(t - \Delta t))}{\Delta t} \right).$$

Производные в среднем второго порядка

Рассмотрим винеровский процесс $w(t)$ в $\mathbb{R}^n$ в качестве процесса $\eta(t)$ и процесс $\xi(t)$ как решение стохастического дифференциального уравнения Ито:

$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + A(t, \xi(t))dw(t)$, где снос $a(t, x)$ и диффузионное слагаемое $A(t, x)$ – векторное поле и поле линейных операторов в $\mathbb{R}^n$ соответственно.

Будем рассматривать производные вида

$$D_*^w D_*^w \xi(t) \tag{3}$$

Обобщённая обратная формула Ито

$$Y_{s,t} = y + \int_s^t B_{s,u} du + \int_s^t \Sigma_{s,u} dw(u),$$

$$F_{s,t}(x) = F(x) + \int_s^t G_{u,t}(x) du + \int_s^t H_{u,t}(x) dw(u),$$

$$\begin{aligned} F_{v,t}(Y_{s,v}) - F_{u,t}(Y_{s,u}) &= \int_u^v (\nabla F_{r,t}(Y_{s,r})' B_{s,r} + \\ &+ \frac{1}{2} \nabla^2 F_{r,t}(Y_{s,r})' \Sigma_{s,r} \Sigma_{s,r}' - G_{r,t}(Y_{s,r})) dr + \\ &+ \int_u^v (\nabla F_{r,t}(Y_{s,r})' \Sigma_{s,r} - H_{r,t}(Y_{s,r})) dw(r) \end{aligned}$$

Теорема

Для сноса равного 0, $a(t)$ и $a(t, x)$, а также диффузионного слагаемого равного A , Aw , $A(t)$ можно вычислить производную слева в среднем $D_^w D_*^w \xi(t)$ в явном виде.*

Рассмотрим

$$d\xi_1(t) = Adw(t),$$

$$d\xi_2(t) = A(t)dw(t),$$

$$d\xi_3(t) = A(t)w(t)dw(t),$$

$$d\xi_4(t) = a(t, \xi_4(t))dt + A(t)dw(t).$$

Пусть $\sigma_{ij}(t, x) = (AA^*)_{ij}(t, x)$. Справедлива формула:

$$D_* \xi(t) = a_*(t, \xi(t)), \quad a_*^i(t, x) = a^i(t, x) - \frac{1}{p_t(x)} \partial_j (\sigma^{ij}(t, x) p_t(x))$$

$$p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi t)^n}} \exp\left\{-\frac{1}{2t} x^* x\right\}$$

$$D_*^w D_*^w \xi_1(t) = 0,$$

$$D_*^w D_*^w \xi_2(t) = \frac{\sigma(t)}{t} w(t),$$

$$D_*^w D_*^w \xi_3(t) = E_t^w(-2\sigma(t)/t) + \frac{2\sigma(t)}{t} / t^2 w^2(t),$$

$$D_*^w D_*^w \xi_4(t) = E_t^w(a(t, w) - \sigma(t) - 2\sigma(t)/t) + \frac{2\sigma(t)}{t} / t^2 w^2(t).$$

Список литературы

- ❶ P.Del Moral, S.S. Singh. Backward Itô-Ventzell and stochastic interpolation formulae
- ❷ G. Da Prato, J.-L. Menaldi, L.Tubaro. Some Results of Backward Itô Formula
- ❸ D. Ocone, E. Pardoux. A generalized Itô-Ventzell formula.Application to a class of anticipating stochastic differential equations
- ❹ J.Cresson, S.Darses. Stochastic embedding of dynamical systems
- ❺ Ю.Е. Гликлик. Стохастические уравнения и включения с производными в среднем и их приложения.
- ❻ В.И. Арнольд, Б.А. Хесин. Топологические методы в гидродинамике.
- ❼ А.Н. Ширяев. Броуновское движение и винеровская мера.
- ❽ Д.Дж. Эбин, Д. Марсден. Группы диффеоморфизмов и движение несжимаемой жидкости.