Уравнения Вейнгартена для C^1 поверхностей

Климентов Д.С. Ростов-на-Дону, ЮФУ

2 июня 2025 г.

Пусть S — поверхность класса C^2 с параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(x^1, x^2)$ и вектором нормали $\vec{n}$. Первую и вторую основные формы поверхности будем обозначать $I = g_{ij} dx^i dx^j$, $II = b_{ij} dx^i dx^j$.

На S имеют место деривационные уравнения Вейнгартена

$$\vec{n}_1 = \frac{g_{12} b_{12} - g_{22} b_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \vec{r}_1 + \frac{g_{12} b_{11} - g_{12} b_{11}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \vec{r}_2,$$

$$\vec{n}_2 = \frac{g_{12} b_{22} - g_{22} b_{12}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \vec{r}_1 + \frac{g_{12} b_{12} - g_{11} b_{22}}{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} \vec{r}_2,$$

Зададим на S диффузионный процесс, порождённый метрикой поверхности. Будем обозначать его B_t.

На поверхности S имеет место формула Ито:

$$df(Z_t) = \partial_i f(Z_t) dZ_t^i + \frac{1}{2} \partial_i \partial_j f(Z_t) dZ_t^i dZ_t^j.$$

Выберем вместо случайного процесса Z_t каноническое броуновское движение $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ на S и подставим в формулу Ито, воспользовавшись свойствами броуновского движения:

$$df(B_t) = \partial_i f(B_t) dB_t^i + \frac{1}{2} \left[\partial_{11} f(B_t) dt + \partial_{22} f(B_t) dt \right].$$

Рассмотрим последнюю формулу для двух частных случаев:

1. $Z_1 = (B_t^1, 0)$;
2. $Z_2 = (0, B_t^2)$.

Для вторых производных получаем равенства

$$\partial_{11} f(Z_1) dt = 2 \left(df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1) dB_t^1 \right),$$

$$\partial_{22} f(Z_2) dt = 2 \left(df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2) dB_t^2 \right).$$

Определение

Второй производной Ито вдоль траектории броуновского движения B^1 (B^2) назовём

$$\partial_{11} f(Z_1)dt = 2\left(df(Z_1) - \partial_1 f(Z_1)dB_t^1\right),$$

$$\partial_{22} f(Z_2)dt = 2\left(df(Z_2) - \partial_1 f(Z_2)dB_t^2\right).$$

Пусть теперь S — поверхность класса C^1, положительной гауссовой кривизны. Не ограничивая общности, будем считать, что вторая квадратичная форма приведена к изотермическому виду:

$$II = \mu\left(dx^{1^2} + dx^{2^2}\right).$$

$$n_1 = \mu \left[\frac{-g_{22}\vec{r}_1 + g_{12}\vec{r}_2}{|I|} \right],$$

$$n_2 = \mu \left[\frac{g_{12})\vec{r}_1 - g_{11}\vec{r}_2}{|I|} \right],$$

где $\mu(B_t^1)dt = \frac{(\vec{r}_{11I}, \vec{r}_1, \vec{r}_2)}{|I|}$, где $\vec{r}_{11I}$ — вторая производная Ито вдоль соответствующего направления, производные нормали понимаются в предельном смысле.

Спасибо за внимание!