О наследуемости равномерности дробной частью свертки с равномерной на замещении случайной величиной

Абдрахманов Т. Р., Андриянов Н. А., Кондратенко А. Е., Копытько М. Ю., Октысюк К. Д., Соболев В. Н., Ульянцев Я.А.

МГУ им. М. В. Ломоносова

5 июня 2025 г.

Дивноморское

$$s_n = \exp\left(-\frac{1}{n^2}\right) < 1, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$s_1 \cdots s_n = \exp\left(-\left(1 + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)\right) \to \exp\left(-\frac{\pi^2}{6}\right), \quad n \to +\infty$$

Назовем дробной частью $\{\xi\}_{N^2}$ двумерной целочисленной случайной величины $\xi = \left(\xi^1, \xi^2\right)$ вектор дробных частей её компонент $\left(\{\xi^1\}_N, \{\xi^2\}_N\right)$.

Назовем дробной частью $\{\xi\}_{[0,1)^2}$ двумерной случайной величины $\xi = \left(\xi^1, \xi^2\right)$ вектор дробных частей её компонент $\left(\{\xi^1\}, \{\xi^2\}\right)$.

Теорема (М4)

Пусть ξ_1, ξ_2 суть независимые случайные величины, распределенные на $\mathbb{Z}_N^2$, и $\xi = \{\xi_1 + \xi_2\}_{N^2}$.
Тогда если существуют неотрицательные ε_1, ε_2 такие, что для любого $m \in \mathbb{Z}_N^2$ справедливы неравенства

$$\left| p_1(m) - \frac{1}{N^2} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_1}{N^2} \qquad \text{и} \qquad \left| p_2(m) - \frac{1}{N^2} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_2}{N^2},$$

то для любого $m^* \in \mathbb{Z}_N^2$ справедливо

$$\left| p(m^*) - \frac{1}{N} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2}{N^2}$$

Теорема (M5)

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ суть независимые случайные величины, распределенные на $\mathbb{Z}_N^2$, и $\xi = \{\xi_1 + ... + \xi_n\}_{N^2}$.
Тогда если существуют неотрицательные $\varepsilon_k, k = 1, \dots, n$ такие, что для любого $m \in \mathbb{Z}_N^2$ справедливы неравенства

$$\left| p_k(m) - \frac{1}{N^2} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_k}{N^2}, \qquad k = 1, 2, \dots, n,$$

то для любого $m^* \in \mathbb{Z}_N^2$ справедливо

$$\left| p(m^*) - \frac{1}{N^2} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n}{N^2}.$$

Теорема (М6)

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ суть независимые случайные величины, распределенные на $\mathbb{Z}_N^2$, и $\eta_n = \{\xi_1 + ... + \xi_n\}_{N^2}$.
Пусть существуют неотрицательные $\varepsilon_k, k = 1, ..., n, ...$ такие, что для любого $m \in \mathbb{Z}_N^2$ справедливы неравенства

$$\left| p_k(m) - \frac{1}{N^2} \right| \leqslant \frac{\varepsilon_k}{N^2},\ \ k = 1, 2, ..., n, ...,$$

Пусть $\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_1 \cdot ... \cdot \varepsilon_n) = 0$.
Тогда

$$\eta_n \xrightarrow{d} \mathcal{R}(\mathbb{Z}_N^2)$$

Теорема (M7)

Пусть ξ_1, ξ_2 суть независимые абсолютно непрерывные случайные величины, распределенные на $[0,1)^2$, и $\xi = \{\xi_1 + \xi_2\}_{[0,1)^2}$.
Тогда если существуют неотрицательные $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ такие, что для любого $x \in [0,1)^2$ справедливы неравенства

$$\left|p_1(x) - 1\right| \leqslant \varepsilon_1 \text{ и } \left|p_2(x) - 1\right| \leqslant \varepsilon_2,$$

то для любого $x^* \in [0,1)^2$ справедливо

$$\left|p(x^*) - 1\right| \leqslant \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2.$$

Теорема (M8)

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ суть независимые абсолютно непрерывные случайные величины, распределенные на $[0,1)^2$, и
$\xi = \{\xi_1 + \dots + \xi_n\}_{[0,1)^2}$.
Тогда если существуют неотрицательные $\varepsilon_k, k = 1, \dots, n$ такие, что для любого $x \in [0,1)^2$ справедливы неравенства

$$\left| p_k(x) - 1 \right| \leqslant \varepsilon_k, \;\; k = 1, 2, \dots, n,$$

то для любого $x^* \in [0,1)^2$ справедливо

$$\left| p(x^*) - 1 \right| \leqslant \varepsilon_1 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n.$$

Теорема (M9)

Пусть $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ суть независимые абсолютно непрерывные случайные величины, распределенные на $[0,1)^2$, и
$\eta_n = \{\xi_1 + ... + \xi_n\}_{N^2}$.
Пусть существуют неотрицательные $\varepsilon_k, k = 1, ..., n, ...$ такие, что для любого $x \in [0,1)^2$ справедливы неравенства

$$\left| p_k(x) - 1 \right| \leqslant \varepsilon_k, \;\; k = 1, 2, ..., n, ...,$$

Пусть $\lim_{n\to\infty}(\varepsilon_1 \cdot ... \cdot \varepsilon_n) = 0$.
Тогда

$$\eta_n \xrightarrow{d} \mathcal{R}\left([0,1)^2\right)$$

Теорема (ДГ1)

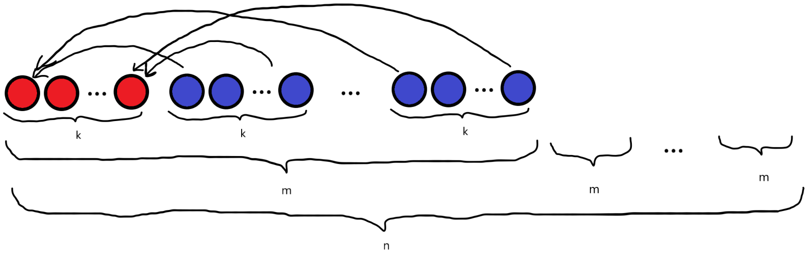
Пусть целочисленная двумерная случайная величина ξ *и равномерная на множестве* $\{0, 1, \ldots, N-1\}^2$ *случайная величина* η *независимы.*

Тогда случайная величина $\{\xi + \eta\}_{N,N}$ *имеет максимальную энтропию среди всех случайных величин, распределённых на множестве* $\{0, 1, \ldots, N-1\}^2$*.*

Теорема (ДГ2)

Пусть произвольная двумерная случайная величина ξ *и равномерно распределённая на квадрате* $[0,1]^2$ *случайная величина* η *независимы.*
Тогда случайная величина $\{\xi + \eta\}$ *имеет максимальную энтропию среди всех абсолютно непрерывных случайных величин, распределённых на квадрате* $[0,1]^2$.

Дискретный случай



Определение

Для натуральных m, n, k назовем множество

$$\{0, 1, \dots, k-1, km, km+1, \dots, k(m+1)-1, \dots \\ \dots, km(n-1), km(n-1)+1, \dots, km(n-1)+k-1\}$$

(красные точки на прошлом рисунке) каноническим множеством при делении глубины 1.

Определение

Для натуральных m, n, k назовём дробной частью при делении глубины 1 следующую функцию:

$$\{\cdot\} = \left\{\{\cdot\}_{mnk}\right\}_{n,m,k},$$

где $\{\cdot\}_{mnk}$ — остаток от деления на mnk, а $\{\cdot\}_{n,m,k}$ — отображение, показанное на прошлом рисунке.

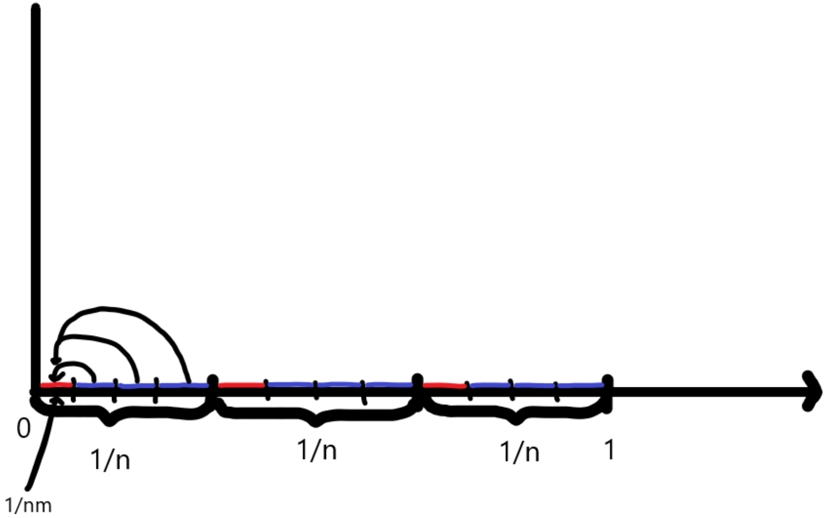
Аналогичным образом определяется каноническое множество и дробная часть при делении произвольной конечной глубины.

Теорема

Пусть целочисленная $\xi \sim \mathcal{R}\{$*каноническое множество*$\}$ *и целочисленная* η *независима с* ξ.

Тогда $\{\xi + \eta\} \sim \mathcal{R}\{$*каноническое множество*$\}$.

Непрерывный случай



Определение

Для натуральных m, n назовём множество

$$\left[0, \frac{1}{nm}\right) \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{m+1}{nm}\right) \cup \dots \cup \left[1 - \frac{1}{n}, 1 - \frac{m-1}{nm}\right)$$

(красные отрезки на прошлом рисунке) каноническим множеством при делении глубины 1.

Определение

Для натуральных m, n назовём дробной частью при делении глубины 1 следующую функцию:

$$\{\cdot\} = \left\{\{\cdot\}_{[0,1)}\right\}_{n,m},$$

где $\{\cdot\}_{[0,1)}$ — остаток от деления на 1, а $\{\cdot\}_{n,m}$ — отображение, показанное на прошлом рисунке.

Аналогичным образом определяется каноническое множество и дробная часть при делении произвольной конечной глубины.

Теорема

Пусть абсолютно непрерывная $\xi \sim \mathcal{R}\{\text{каноническое множество}\}$ *и* η *независима с* ξ.
Тогда $\{\xi + \eta\} \sim \mathcal{R}\{\text{каноническое множество}\}$.

Определение

*Множество $M \subset \mathbb{Z}^n$ назовем *-связным, если любые его точки можно соединить ломаной, звенья которой имеют единичную длину, а узлы являются элементами M.*

Теорема

*Пусть $M \subset \mathbb{Z}^n$ — конечное *-связное множество, $\mathbb{Z}^n$ можно замостить множеством M, $\xi \sim \mathcal{R}\{M\}$, η — независимый с ξ целочисленный n-мерный случайный вектор. Тогда $\{\xi + \eta\} \sim \mathcal{R}\{M\}$.*

Теорема

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченное связное измеримое множество, $\mathbb{R}^n$ можно замостить множеством M, $\xi \sim \mathcal{R}\{M\}$, η — независимый с ξ n-мерный случайный вектор. Тогда $\{\xi + \eta\} \sim \mathcal{R}\{M\}$.

Теорема

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots$ *суть независимые случайные величины со стандартным распределением Коши. Тогда*

$$\{\xi_1 + \ldots + \xi_n\} \xrightarrow{d} \eta \sim \mathcal{R}[0,1], \qquad n \to +\infty,$$

$$p_{\{\xi_1+\ldots+\xi_n\}}(x) = \frac{1 - e^{-4\pi n}}{1 - 2e^{-2\pi n}\cos(2\pi x) + e^{-4\pi n}}, \quad x \in (0,1).$$

Закон Бенфорда (первой значащей цифры)

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 9 \\ \lg\left(\frac{2}{1}\right) & \lg\left(\frac{3}{2}\right) & \cdots & \lg\left(\frac{10}{9}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \lg\left(\frac{k+1}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, 9$$

$$\eta \sim \mathcal{R}[0,1], \quad \xi = [10^{\eta}]$$

Обобщённый закон Бенфорда

$$\xi_n \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ \log_n\left(\frac{2}{1}\right) & \log_n\left(\frac{3}{2}\right) & \cdots & \log_n\left(\frac{n}{n-1}\right) \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}(\xi = k) = \log_n\left(\frac{k+1}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, n-1$$

$$\eta \sim \mathcal{R}[0,1], \quad \xi = [n^\eta]$$

Теорема (Т3)

Пусть случайная величина ξ_α имеет одностороннее устойчивое распределение с параметром $\lambda = 1$. $G_1(\xi_\alpha)$ - первая значащая цифра. Тогда оценка отклонения случайной величины ξ_α в системе счисления по основанию n от закона Бенфорда имеет следующий вид

$$\left| \mathrm{P}\left\{ G_1(\xi_\alpha) = g \right\} - \log_n\left(1 + \frac{1}{g}\right) \right| \leqslant 1{,}2 \ln\left(1 + \frac{1}{g}\right)\sqrt{\alpha}$$

Теорема (Т4)

Пусть случайная величина ξ_α имеет гамма-распределение с параметром $\lambda = 1$. $G_1(\xi_\alpha)$ - первая значащая цифра.
Тогда оценка отклонения случайной величины ξ_α в системе счисления по основанию n от закона Бенфорда имеет следующий вид

$$\left| \mathrm{P}\left\{ G_1(\xi_\alpha) = g \right\} - \log_n\left(1 + \frac{1}{g}\right) \right| \leqslant 2{,}5 \ln\left(1 + \frac{1}{g}\right) \alpha$$

Список литературы

[1] *Куликова А. А., Прохоров Ю. В.* Распределение дробных долей случайных векторов: гауссовский случай. I // Теория вероятностей и её применение. 2003. Т. 48, вып. 2. с. 399–402.

[2] *Кондратенко А. Е., Соболев В. Н.* О максимизации энтропии при свёртке с равномерным распределением // Вестник Дагестанского государственного университета. Серия 1: Естественные науки — 2022. — №1. с. 7–11.

[3] *Кондратенко А. Е., Соболев В. Н.* Обобщение и унификация понятий остатка от деления и дробной части, максимизация энтропии дробной части свёртки с равномерным распределением // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. — 2022. — №1. с. 45–52.

[4] *Куликова А. А., Прохоров Ю. В., Хохлов В. И.* H.F.D. (H-function distribution) и закон Бэнфорда. I // Теория вероятностей и её применения. — 2005 — Т. 50, №2 — С. 366–371.

[5] *Куликова А. А., Прохоров Ю. В.* Односторонние устойчивые распределения и закон Бэнфорда // Теория вероятностей и её применения. — 2004 — Т. 49, №1 — С. 178–184.

Владимир Васильевич Сенатов (10 марта 1951 — 22 июня 2021)

Многочлены Чебышева — Эрмита

$$H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \left(e^{-x^2/2}\right)^{(k)}, k \in \mathcal{Z}_+$$

$$\begin{aligned} H_0(x) &\equiv 1, \\ H_1(x) &= x, \\ H_2(x) &= x^2 - 1, \\ H_3(x) &= x^3 - 3x, \\ H_4(x) &= x^4 - 6x^2 + 3. \end{aligned}$$

Моменты Сенатова

$$\theta_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} H_k(x)\,\mathrm{d}F(x), k \in \mathcal{Z}_+.$$

$$\theta_k = H_k(\alpha)$$

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= 1, \\
\theta_1 &= \alpha_1, \\
\theta_2 &= \alpha_2 - 1, \\
\theta_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1, \\
\theta_4 &= \alpha_4 - 6\alpha_2 + 3.
\end{aligned}$$

Сопряженные многочлены Чебышева-Эрмита

$$\overline{H}_0(x) \equiv 1,$$
$$\overline{H}_1(x) = x,$$
$$\overline{H}_2(x) = x^2 + 1,$$
$$\overline{H}_3(x) = x^3 + 3x,$$
$$\overline{H}_4(x) = x^4 + 6x^2 + 3.$$

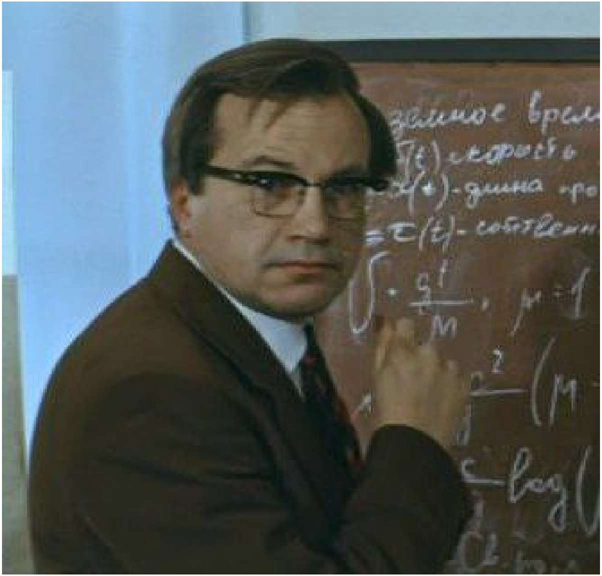
Обратное выражение моментов

$$\alpha_k = \overline{H}_k(\theta)$$

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= 1, \\
\alpha_1 &= \theta_1, \\
\alpha_2 &= \theta_2 + 1, \\
\alpha_3 &= \theta_3 + 3\theta_1, \\
\alpha_4 &= \theta_4 + 6\theta_2 + 3.
\end{aligned}$$

Юрий Васильевич Прохоров
(15 декабря 1929 — 16 июля 2013)

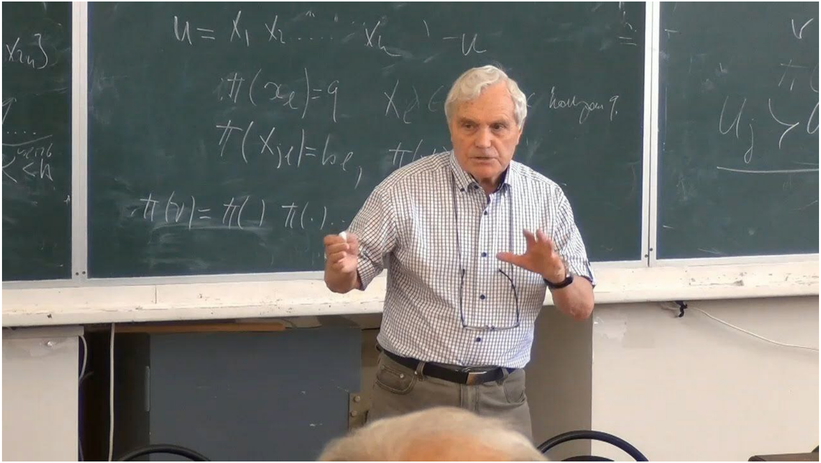
Владимир Михайлович Золотарёв
(27 февраля 1931 — 7 ноября 2019)



Математический анализ

Теория вероятностей

Профессор Московского университета Виктор Николаевич Латышев (9 февраля 1934 — 13 апреля 2020)




М
СТАНЦИЯ МЕТРО
УНИВЕРСИТЕТ
UNIVERSITET