

Обобщение теоремы А.Г. Постникова об убегающем пике

Соболев В.Н., Кондратенко А.Е., Елизарова Н.А.

г. Геленджик, пос. Дивноморское, 5 июня 2025

МКСМ-10

Медленно убывающие функции

Определение.¹ Некоторую функцию $g(x)$ будем называть *медленно, или слабо, убывающей* на $\mathbb{R}$, если при

$$y < x, \quad y \rightarrow +\infty, \quad x - y \rightarrow 0$$

выполняется неравенство

$$\lim (g(x) - g(y)) > -\gamma,$$

где $\gamma > 0$, а предел также берется по двум переменным.

Замечание. Если функция $g(x)$ на $\mathbb{R}$ имеет производную, удовлетворяющую неравенству

$$g'(x) > -\gamma,$$

где $\gamma > 0$, то она является слабо убывающей на $\mathbb{R}$.

¹A. G. Postnikov, Tauberian theory and its applications, Trudy Mat. Inst. Steklov. 144 (1979), 3147; English transl., Proc. Steklov Inst. Math., 144 (1980), no. 2(144).

Медленно убывающие функции 2

Фиксируем натуральное число $n_0 \geq 2$. По условию медленного (слабого) убывания функции $g(x)$ на $\mathbb{R}$ существуют такие N и Δ , что при

$$N < x_1, \quad x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta$$

выполняется неравенство

$$g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \leq g(x) .$$

Теорема Постникова

Теорема.² Пусть

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(\lambda(x-y))}{\lambda(x-y)^2} f(x) dx = l$$

при некоторых (или всех) λ произвольно больших λ , а функция $f(x)$ ограничен и медленно колеблется на $\mathbb{R}$ или ограничена, вещественна и слабо убывает на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

²A. G. Postnikov, Tauberian theory and its applications, Trudy Mat. Inst. Steklov. 144 (1979), 3147; English transl., Proc. Steklov Inst. Math., 144 (1980), no. 2(144).

Преобразование интеграла 1

На функцию

$$p(x) = \frac{\sin^2 x}{\pi x^2}$$

можно смотреть как на плотность некоторого распределения. Тогда условие из теоремы А.Г. Постникова можно записать в виде ($\lambda > 0$, $p(x)$ чётная функция)

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda(x-y)) f(x) dx = l,$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x - \lambda y) f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = l,$$

Преобразование интеграла 2

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x-y) f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = l,$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-x) f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = l.$$

Формула свёртки³

$$p_{\xi_1+\xi_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi_2}(y-x) p_{\xi_1}(x) dx.$$



Теорема об убегающем пике

Определение. Пусть плотность $p(x)$ чётная функция и

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-x) f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = l$$

при некоторых (или всех) произвольно больших $\lambda > 0$, а функция $f(x)$ ограничена, вещественна и слабо убывает на $\mathbb{R}$. Тогда

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Сведение 1

Из

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-x) dx, \quad l = l \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-x) dx$$

следует, что условие теоремы может быть записано в виде

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-x) (f(x) - l) dx = 0.$$

Сведение 2

В

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-x)(f(x)-l) dx = 0$$

функция $g(x) = f(x) - l$ также является ограниченной и слабо убывающей вместе с функцией $f(x)$. Поэтому теорему достаточно доказать для случая $l = 0$.

Сведение 3

Итак,

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(y-x) g\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = 0$$

где $g(x)$ — ограниченная медленно убывающая на $\mathbb{R}$ функция.
По условию ограниченности $g(x)$ существует такое число M ,
что

$$|g(x)| \leq M.$$

Неравенство для $g(x)$ 1

Фиксируем натуральное число $n_0 \geq 2$.

По условию медленного убывания функции $g(x)$ на $\mathbb{R}$ существуют такие N и Δ , что при

$$N < x_1, \quad x_1 \leq x \leq x_1 + \Delta$$

выполняется неравенство

$$g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \leq g(x) .$$

Неравенство для интеграла

Тогда

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda(x-y)) g(x) d\lambda x \geq \int_{x_1}^{x_1+\Delta} p(\lambda(x-y)) g(x) d\lambda x - \\ &- M \int_{-\infty}^{x_1} p(\lambda(x-y)) d\lambda x - M \int_{x_1+\Delta}^{+\infty} p(\lambda(x-y)) d\lambda x \geq \\ &\geq \left(g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \right) \int_{x_1}^{x_1+\Delta} p(\lambda(x-y)) d\lambda x - \\ &- M \int_{-\infty}^{x_1} p(\lambda(x-y)) d\lambda x - M \int_{x_1+\Delta}^{+\infty} p(\lambda(x-y)) d\lambda x. \end{aligned}$$

Замена

Замена

$$y = x + \frac{\Delta}{2}, \quad y_1 = x_1 + \frac{\Delta}{2}$$

и

$$z = \lambda(x - y_1) = \lambda \left(x - x_1 - \frac{\Delta}{2} \right).$$

Сдвиг в ноль 1

Тогда

$$J \geq \left(g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \right) \int_{x_1}^{x_1 + \Delta} p \left(\lambda \left(x - x_1 - \frac{\Delta}{2} \right) \right) d\lambda x -$$

$$- M \int_{-\infty}^{x_1} p \left(\lambda \left(x - x_1 - \frac{\Delta}{2} \right) \right) d\lambda x - M \int_{x_1 + \Delta}^{+\infty} p \left(\lambda \left(x - x_1 - \frac{\Delta}{2} \right) \right) d\lambda x$$

Сдвиг в ноль 2

$$\begin{aligned} &= \left(g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \right) \int_{-\lambda \frac{\Delta}{2}}^{\lambda \frac{\Delta}{2}} p(z) dz - \\ &\quad - M \int_{-\infty}^{-\lambda \frac{\Delta}{2}} p(z) dz - M \int_{\lambda \frac{\Delta}{2}}^{+\infty} p(z) dz = \\ &= \left(g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \right) \int_{-\lambda \frac{\Delta}{2}}^{\lambda \frac{\Delta}{2}} p(z) dz - 2M \int_{-\infty}^{-\lambda \frac{\Delta}{2}} p(z) dz. \end{aligned}$$

Нижняя оценка интеграла 1

Существует такое $\lambda > 0$, что

$$\int_{-\lambda \frac{\Delta}{2}}^{\lambda \frac{\Delta}{2}} p(z) dz = 1 - \varepsilon.$$

Тогда

$$J \geq \left(g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \right) (1 - \varepsilon) - 2M\varepsilon > \frac{1}{2} \left(g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \right).$$

Из последнего равенства следует, что при $\lambda > \lambda_\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{\lim}_{x_1 \rightarrow +\infty} \left(g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \right) \leq \overline{\lim}_{x_1 \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p \left(\lambda \left(x - x_1 - \frac{\Delta}{2} \right) \right) g(x) dx =$$

Верхняя оценка для $g(x)$

Из

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{\lim}_{x_1 \rightarrow +\infty} \left(g(x_1) - \frac{\gamma}{n_0} \right) \leq 0$$

получаем

$$\overline{\lim}_{x_1 \rightarrow +\infty} g(x_1) \leq \frac{\gamma}{n_0}.$$

В силу произвольного выбора $n_0 \geq 2$

$$\overline{\lim}_{x_1 \rightarrow +\infty} g(x_1) \leq 0.$$

Оценка сверху 1

Аналогично предыдущему пункту из неравенства

$$\begin{aligned} J = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda(x-y)) g(x) d\lambda x &\leq \int_{x_1-\lambda\Delta}^{x_1} p(\lambda(x-y)) g(x) d\lambda x + \\ &+ M \int_{-\infty}^{x_1-\lambda\Delta} p(\lambda(x-y)) d\lambda x + M \int_{x_1}^{+\infty} p(\lambda(x-y)) d\lambda x \end{aligned}$$

получаем, что

$$-\frac{\gamma}{n_0} \leq \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} g(x_1), \quad 0 \leq \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} g(x_1).$$

Объединение оценок

Таким образом,

$$0 \leq \lim_{x_1 \rightarrow +\infty} g(x_1) \leq \overline{\lim}_{x_1 \rightarrow +\infty} g(x_1) \leq 0.$$

и

$$\lim_{x_1 \rightarrow +\infty} g(x_1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l.$$

Фейеровские пары

При изучении различных вопросов связанных со свертками функций, интегралами Фурье, суммированиями некоторых интегралов достаточно часто используются Фейеровские пары функций (ядер)⁴ (f, g) .

$$f \in L_1(-\infty, +\infty)$$

$$f \in C(U_\varepsilon(0))$$

$$f(x) = f(-x)$$

$$f(0) = 1$$

$$|p(x)| \leq p_0(|x|)$$

$$p(x) = p(-x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 2\pi$$

$$p_0(x) \in L_1(0, +\infty)$$

$$p_0(x) \geq 0$$

$$p_0(x) \text{ не возрастающая}$$

$$\text{функция на } (0, +\infty)$$

$$p(x) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}[f](x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(t) dt.$$

⁴ Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — Москва : Наука, 1966. — 671 с. ▶

Фейеровские пары

С вероятностной точки зрения данные пары функций (ядер) могут рассматриваться как плотность $p_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x)$ и характеристическая функция (х.ф.)

$$f_{\xi}(t) = M e^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_{\xi}(x) dx ,$$

некоторого распределения вероятностей с функцией распределения $F_{\xi}(x)$, для которых, как хорошо известно, существует формула обращения (преобразование Фурье):

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F} [f_{\xi}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f_{\xi}(t) dt .$$

Пара Абеля–Пуассона

Паре Абеля–Пуассона в теории вероятностей можно сопоставить распределение Коши и его х.ф. или стандартное распределение Лапласа (двустороннее экспоненциальное распределение) и его х.ф.:

$$c(y) = p_c(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+t^2}, \quad \lambda(x) = p_\lambda(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad \lambda > 0,$$

и

$$\hat{c}(x) = f_c(t) = e^{-|x|}, \quad \hat{\lambda}(x) = f_\lambda(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Пара Гаусса

Паре Гаусса с вероятностной точки зрения соответствует х.ф. и плотность стандартного нормального распределения

$$\hat{\varphi}(t) = f_{\eta}(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \varphi(x) = p_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}.$$

Пара Фейера

Так, пара Фейера⁵ представляет собой х.ф.

$$\hat{\tau}(t) = f_{\xi}(t) = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

и плотность вероятности

$$\tau(x) = p_{\xi}(x) = \max\{0, 1 - |t|\}$$

симметричного треугольного распределения на отрезке $[-1, 1]$.

⁵Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — Москва : Наука, 1966. — 671 с. ▶

Преобразование из теоремы Постникова

Для любой функции $f(x)$ и плотности $p(x)$ можно рассмотреть преобразование

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(f, y) &= \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda(x - y)) f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} p(\lambda x - \lambda y) f(x) d\lambda x = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} p(x - \lambda y) f\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx.\end{aligned}$$

Поскольку $p(x) = p(-x)$, то

$$\mathcal{P}(f, y, \lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x) f\left(\frac{x}{\lambda} + y\right) dx.$$

Спасибо за внимание

Спасибо за внимание.

-  Джрбашян, Мхитар Мкртичевич. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. — М.: Наука, 1966. — 671 с.
-  A. G. Postnikov, Tauberian theory and its applications, Trudy Mat. Inst. Steklov. 144 (1979), 3147; English transl., Proc. Steklov Inst. Math., 144 (1980), no. 2(144).
-  В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.:Мир, 1964.
-  А. Н. Ширяев, Вероятность 1. 4-е изд. — М.:МЦНМО, 2007, 552 с.; англ. пер.: A. N. Shiryaev, Probability1, 3rd ed., Grad. Texts in Math., 95, Springer, New York, 2016, xvii+486 pp.