Спектр случайного оператора ветвящегося блуждания по $\mathbb{Z}$ в случайной поглощающей среде

Олег Ивлев

10-я Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-10)

Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова, кафедра теории вероятностей
Научный руководитель: Яровая Елена Борисовна, д.ф.-м.н., профессор

Дивноморское, 1-6 июня, 2025г.

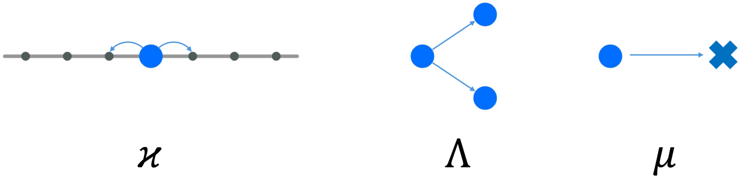
История вопроса

1. ВСБ по целочисленным решеткам с непрерывным временем в однородной случайной среде
   - Я. Б. Зельдович [и др.], "Перемежаемость в случайной среде.", 1987 [1]
   - Gärtner, J., Molchanov, S., "Parabolic problems for the Anderson model: I. Intermittency and related topics.", 1990 [2]
   - Albeverio, S. [и др.], "Annealed moment Lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environmen", 2000 [3]
2. ВСБ на целочисленной решетке с непрерывным временем в <u>неоднородной</u> случайной среде
   - Yarovaya E., "Symmetric branching walks in homogeneous and non homogeneous random environments.", 2012 [4]
   - Kutsenko, V., Molchanov, S., Yarovaya, E., "Branching random walks in a random killing environment with a single reproduction source.", 2024 [5]

Описание модели. Ветвящееся случайное блуждание

Мы рассматриваем одномерную решетку $\mathbb{Z}$, на которой частицы могут передвигаться между соседними точками. За малое время h частица:

- разделится надвое с вероятностью $\Lambda h + o(h)$,
- равновероятно прыгнет в одну из соседних точек с вероятностью $\varkappa h + o(h)$,
- исчезнет с вероятностью $\mu h + o(h)$,
- ничего не произойдет с вероятностью $1 - \Lambda h - \varkappa h - \mu h + o(h)$.



Описание модели. Случайное блуждание в случайной среде

Мы предполагаем, что:

- в момент времени $t = 0$ на решетке находится одна частица в точке x,
- центр размножения частиц расположен в нуле.

Ветвление задается полем о.р. случайных величин $\mathcal{M} = \{\mu(x, \cdot), x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}\}$. Поле $\mathcal{M}$ формирует «случайную убивающую среду» на $\mathbb{Z}$.

Мы рассматриваем ветвление в «замороженной» среде, т.е. в реализации заданного поля $\mathcal{M}(\omega) = \{\mu(x, \omega), x \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}, \omega \in \Omega\}$ в момент времени $t = 0$.

Описание модели. Механизм блуждания и ветвления ВСБ в случайной среде

Дальнейшая эволюция описывается следующим образом:

- если частица частица находится точке $x = 0$, то за малое время h она
  - разделится надвое с вероятностью $\Lambda h + o(h)$
  - равновероятно прыгнет в одну из соседних точек с вероятностью $\varkappa h + o(h)$
  - останется на месте с вероятностью $1 - \Lambda h - \varkappa h + o(h)$
- если частица частица находится в точке $x \neq 0$, то за малое время h она
  - исчезнет с вероятностью $\mu(x, \omega)h + o(h)$
  - равновероятно прыгнет в одну из соседних точек с вероятностью $\varkappa h + o(h)$
  - останется на месте с вероятностью $1 - \mu(x, \omega)h - \varkappa h + o(h)$

Основные объекты исследования

Обозначим через $N_t(y, \omega)$ набор численности частиц в точках $y \in \mathbb{Z}$.

Мы будем рассматривать среднюю численность частиц:

$$m_1(t, x, y, \omega) = E_x N_t(y, \omega)$$

Основным объектом исследования является $P(\Lambda, \varkappa)$:

$$P(\Lambda, \varkappa) = \mathbb{P}\left(\exists \lambda(\omega) > 0 : \lim_{t \to \infty} \frac{m_1(t, x, y, \omega)}{C(x, y) e^{\lambda t}} = 1, \quad \forall x, y \in \mathbb{Z}\right),$$

где $C(x, y) = C(x, y, \omega, \Lambda, \varkappa) > 0$, $\lambda = \lambda(\omega, \Lambda, \varkappa)$

Задача Коши для m_1

Введем потенциал:

$$V(x,\omega) = \begin{cases} \Lambda, & x = 0, \\ -\mu(x,\omega), & x \neq 0. \end{cases}$$

Тогда задача Коши для m_1 примет следующий вид:

$$\frac{\partial m_1(t,x,y,\omega)}{\partial t} = H(\omega) m_1(t,x,y,\omega),$$
$$m_1(0,x,y) = \delta_y(x),$$

где

- $\varkappa \Delta f(x) = \frac{\varkappa}{2}(f(x+1) + f(x-1) - 2f(x))$ — разностный лапласиан на $\mathbb{Z}$,
- $H(\omega) = \varkappa \Delta + V(x,\omega)$ — самосопряженный оператор со случайным возмущением

Спектр оператора $H(\omega)$

Спектр оператора $H(\omega)$ может иметь вид:

$$\sigma(H(\omega)) = [-s; 0] \cup \lambda(\omega), s > 0.$$

Тогда:

$$P(\Lambda, \varkappa) = \mathbb{P}\{\omega : \exists \lambda(\omega) \in \sigma(H(\omega)) : \lambda(\omega) > 0\}.$$

Задача на собственные значения:

$$\begin{cases} (\varkappa \Delta + V(x, \omega))u(x) = \lambda u(x), \\ u(0) = 1, \end{cases}$$

где $\lambda(\omega)$ — собственное значение для собственной функции $u(x)$

Результат из [Kutsenko et al, 2024]

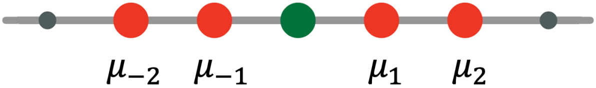
Теорема

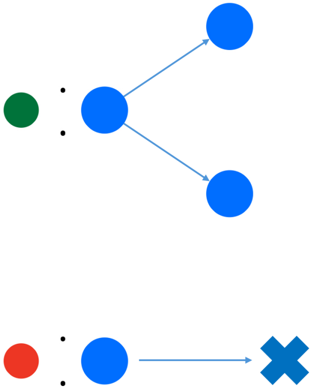
Рассмотрим среду w_1, в которой 2 соседние с нулем точки имеют интенсивности гибели равные μ_1, μ_{-1}. Положительное собственное значение в этой среде существует тогда и только тогда, когда выполняется:

$$\Lambda > \frac{\mu_1}{1+\sigma\mu_1} + \frac{\mu_{-1}}{1+\sigma\mu_{-1}}$$

где $\sigma = \frac{2}{\varkappa}$

Случай 4 источников





Решетка с центром деления в нуле и четырьмя симметрично расположенными центрами гибели

Случай 4 источников

Лемма

Рассмотрим среду w_2, в которой 4 соседние с нулем точки имеют интенсивности гибели равные μ_1, μ_{-1}, μ_2, μ_{-2}. Положительное собственное значение в этой среде существует тогда и только тогда, когда выполняется:

$$\Lambda > \frac{\sigma\mu_{-2} + \sigma\mu_{-1}(1+\sigma\mu_{-2})}{\sigma\mu_{-2} + (1+\sigma\mu_{-1})(1+\sigma\mu_{-2})} + \frac{\sigma\mu_2 + \sigma\mu_1(1+\sigma\mu_2)}{\sigma\mu_2 + (1+\sigma\mu_1)(1+\sigma\mu_2)}$$

где $\sigma = \frac{2}{\varkappa}$

Случай 4 источников

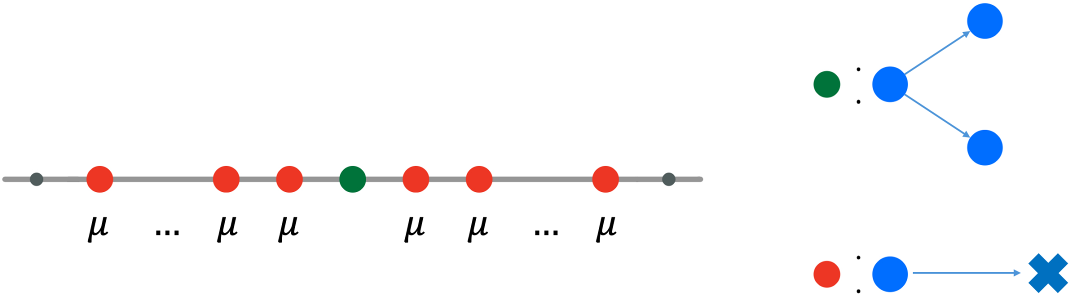
Теорема

Верно равенство:

$$P(\Lambda, \varkappa) = \mathbb{P}\left(\Lambda > \frac{\sigma\xi_{-2} + \sigma\xi_{-1}(1+\sigma\xi_{-2})}{\sigma\xi_{-2} + (1+\sigma\xi_{-1})(1+\sigma\xi_{-2})} + \frac{\sigma\xi_{2} + \sigma\xi_{1}(1+\sigma\xi_{2})}{\sigma\xi_{2} + (1+\sigma\xi_{1})(1+\sigma\xi_{2})}\right)$$

где $\sigma = \frac{2}{\varkappa}$ и ξ_i — независимые копии $\mu(x, \omega)$, $i = \pm 1, \pm 2$

Случай $2n$ источников



Решетка с центром деления в нуле и $2n$ симметрично расположенными центрами гибели с одинаковыми интенсивностями исчезновения

Случай $2n$ источников

Лемма

Рассмотрим среду w_n, в которой $2n$ соседние с нулем точки имеют интенсивности гибели равные μ. Положительное собственное значение в этой среде существует тогда и только тогда, когда выполняется:

$$\Lambda > \frac{2}{\sigma}\left(\frac{(1+\sigma\mu)(D_{n-1}-D_{n-2})-(D_{n-2}-D_{n-3})}{(1+\sigma\mu)D_{n-1}-D_{n-2}}\right)$$

где $\sigma = \frac{2}{\varkappa}$, $D_n = \sum_{i=0}^{n}(\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-4}}{2})^{n-i}(\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-4}}{2})^{i}$, $\beta = 2+\sigma\mu$.

Случай $2n$ источников

Теорема

Верно равенство:

$$P(\Lambda,\varkappa) = P\left(\Lambda > \frac{2}{\sigma}\left(\frac{(1+\sigma\xi)(D_{n-1}-D_{n-2})-(D_{n-2}-D_{n-3})}{(1+\sigma\xi)D_{n-1}-D_{n-2}}\right)\right),$$

где $\sigma = \frac{2}{\varkappa}$, $D_n = \sum_{i=0}^{n}(\frac{\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2})^{n-i}(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-4}}{2})^{i}, \alpha = 2+\sigma\xi$, где ξ — независимая копия $\mu(x,\omega)$

Спасибо за внимание!

Список литературы I

Я. Б. Зельдович [и др.].
Перемежаемость в случайной среде.
Успехи физических наук., 152(5):3–32, 1987.

Molchanov S. Gärtner J.
Parabolic problems for the anderson model: I. intermittency and related topics.
Communications in mathematical physics, 132(3):613–655, 1990.

Sergio [и др.] Albeverio.
Annealed moment lyapunov exponents for a branching random walk in a homogeneous random branching environment.
Markov Process. Related Fields., 6(4):473–516, 2000.

Список литературы II

Yarovaya E.

Symmetric branching walks in homogeneous and non homogeneous random environments.

Communications in Statistics-Simulation and Computation, 41(7):1232–1249, 2012.

Kutsenko V. Yarovaya E. Molchanov S.

Branching random walks in a random killing environment with a single reproduction source.

Mathematics, 12(4):550, 2024.

König W.

The parabolic anderson model.

In *Pathways in Mathematics*, page 192. Birkhäuser/Springer, 2016.

Список литературы III

Molchanov S.

Lectures on random media.

In *Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1992)*, volume 1581, pages 242–411. Springer, Berlin, 1994.

Е. Б. Яровая.

Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.

Центр прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, М, 104, 2007.