# Случайные блуждания с поглощением частиц

Филичкина Елена Михайловна

кафедра теории вероятностей
механико-математический факультет
МГУ имени М. В. Ломоносова

5 июня 2025

# Случайное блуждание

Случайное блуждание задается матрицей переходных интенсивностей

$$A = (a(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}^d}.$$

A1. $a(x,y) \geq 0$ при $x \neq y$ и $a(x,x) < 0$, $\sum_y a(x,y) = 0$,

A2. $a(x,y) = a(y,x)$,

A3. $a(x,y) = a(0, y-x) =: a(y-x)$,

A4. для каждого $z \in \mathbb{Z}^d$ найдется такой набор векторов $z_1, z_2, \dots, z_k \in \mathbb{Z}^d$, что $z = \sum\limits_{i=1}^{k} z_i$ и $a(z_i) \neq 0$ для $i = 1, \dots, k$,

*A5. $\sigma^2 := -\frac{1}{a(0,0)} \sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^d} |x|^2 a(0,x) < \infty$, то есть конечная дисперсия скачков.

# Случайное блуждание

Переходные вероятности для случайного блуждания $\xi(t)$ при $h \to 0$:

$$p(h, x, y) := \mathsf{P}(\xi(h) = y | \xi(0) = x) = a(x, y)h + o(h), \quad x \neq y,$$

$$p(h, x, x) := \mathsf{P}(\xi(h) = x | \xi(0) = x) = 1 + a(x, x)h + o(h).$$

# Случайное блуждание

Функция $p(t,x,y)$ удовлетворяет следующей системе уравнений

**Обратные уравнения Колмогорова**

$$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = \mathcal{A}p(t,x,y), \quad p(0,x,y) = \delta_y(x),$$

где $\delta(\cdot)$ – дискретная $\delta$-функция Кронекера на $\mathbb{Z}^d$, а $\mathcal{A} : \ell_p(\mathbb{Z}^d) \to \ell_p(\mathbb{Z}^d)$, $1 \le p \le \infty$, – оператор блуждания, действующий по формуле

$$\mathcal{A}\psi(x) = \sum_{x' \in \mathbb{Z}^d} a(x,x')\psi(x').$$

# Случайное блуждание

В случае простого случайного блуждания, когда

$$a(x,y)=\begin{cases}\frac{\varkappa}{2d}, & \text{при } |x-y|=1,\\ -\varkappa, & \text{при } x=y,\\ 0, & \text{при } |x-y|>1,\end{cases}$$

где $\varkappa>0$ – некоторый параметр, характеризующий интенсивность блуждания, оператор $\mathcal{A}$ обозначается $\varkappa\Delta$. Он действует по следующей формуле:

$$\varkappa\Delta\psi(x)=\frac{\varkappa}{2d}\sum_{y:|x-y|=\mathbf{1}}\psi(y)-\varkappa\psi(x).$$

# Случайное блуждание. Функция Грина

$$G_\lambda(x,y) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t,x,y)dt, \lambda \geq 0$$

При $\lambda = 0$ функция Грина $G_\lambda(x,y)$ соответствует ожидаемому числу попаданий частицы в точку $y$, если $x$ – начальная точка блуждания.

$$G_\lambda(x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{[-\pi,\pi]^d} \frac{\cos(\theta, y-x)}{\lambda - \varphi(\theta)} d\theta$$

Здесь $\varphi(\theta)$ – преобразование Фурье переходных интенсивностей $a(z)$, определяемое формулой:

$$\phi(\theta) = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} a(x)\cos(\theta, x), \quad \theta \in [-\pi,\pi]^d.$$

Случайное блуждание *возвратно*, если $G_0(0,0) = \infty$ и *невозвратно*, если $G_0(0,0) < \infty$.

# Поглощение частиц

В выделенных точках решетки $K = \{x_1, ..., x_k\}$ может происходить поглощение, или гибель, частицы. Формально, эти точки являются источниками ветвления, которое задается с помощью инфинитезимальной производящей функции

$$f(u) = b_0 + b_1 u, \quad 0 \le u \le 1,$$

где $b_0 > 0$ – интенсивность поглощения, $b_1 = -b_0$.

$p_*(h, n)$ – вероятность иметь $n$ частиц в момент времени $h$, при условии, что в начальный момент времени имелась одна частица

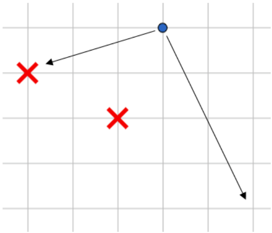
$$p_*(h, 0) = b_0 h + o(h),$$
$$p_*(h, 1) = 1 + b_1 h + o(h).$$

# Совмещение блуждания и поглощения

## Эволюция частиц в рассматриваемом процессе

Частица, расположенная в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, за время $dt \to 0$ может:

1) совершить скачок в точку $y \neq x$, $y \in \mathbb{Z}^d$, с вероятностью $a(x,y)dt + o(dt)$,
2) погибнуть с вероятностью $b_0 dt + o(dt)$ (если $x \in K$),
3) остаться в точке $x$ в течении всего времени $dt$ с вероятностью $1 + a(x,x)dt + \sum_{x_i \in K} \Delta_{x_i}(x)(-b_0 dt) + o(dt)$.

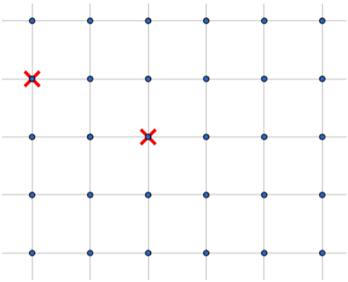


Каждая частица в рассматриваемом процессе эволюционирует по тому же закону, независимо от остальных частиц и от всей предыстории.

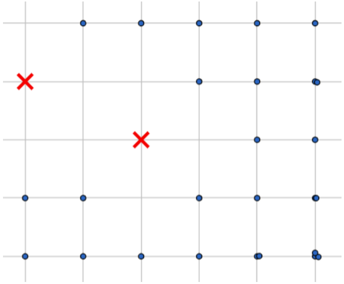
# Основные объекты исследования

- $\mu(t,x)$ – численность частиц в момент времени $t \geq 0$ в точке $x \in \mathbb{Z}^d$,
- $m_n(t,x) := \mathsf{E}\mu^n(t,x), n \in \mathbb{N}$.

Предполагаем, что в начальный момент времени $t = 0$ система состоит из бесконечного числа частиц, а именно, в каждой точке решетки находится по одной частице, то есть $\mu(0,x) = 1$ и $m_n(0,x) = 1 \; \forall x \in \mathbb{Z}^d$.



$t = 0$



$t = t_0 > 0$

Обозначим $p_k(t,x) := \mathsf{P}(\mu(t,x) = k)$. Учитывая эволюцию частиц за малое время, получаем следующее уравнение

$$\frac{dp_k(t,x)}{dt} = \left( -\sum_{x' \neq x} a(x,x')m_1(t,x') + ka(x,x) - kb_0 \sum_{x_i \in K} \Delta_{x_i}(x) \right) p_k(t,x) +$$
$$+ \left( -(k+1)a(x,x) + (k+1)b_0 \sum_{x_i \in K} \Delta_{x_i}(x) \right) p_{k+1}(t,x) +$$
$$+ \sum_{x' \neq x} a(x,x')m_1(t,x')p_{k-1}(t,x).$$

Из полученного уравнения можно получать уравнения для целочисленных моментов численностей частиц, используя определение:

$$\frac{dm_1}{dt} = \sum_{k \geq 1} k \frac{dp_k}{dt}, \quad \frac{dm_2}{dt} = \sum_{k \geq 1} k^2 \frac{dp_k}{dt}$$

# Эволюционный оператор

$$\frac{dm_1(t,x)}{dt} = \mathcal{A}m_1(t,x) - b_0 \sum_{x_i \in K} \Delta_{x_i}(x) m_1(t,x),$$

$$m_1(0,x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

Эволюцию средних численностей частиц в рассматриваемом процессе описывает оператор

$$\mathcal{H} = \mathcal{A} - b_0 \sum_{x_i \in K} \Delta_{x_i},$$

где $\Delta_x = \delta_x \delta_x^T$ – оператор проекции на $x \in \mathbb{Z}^d$.

## Дуальная (в смысле первых моментов) задача

Рассмотрим задачу с другим н.у.: при $t = 0$ на решетке одна частица, расположенная в точке $x \in \mathbb{Z}^d$.
В таких задачах исследуются численность частиц $\mu(t, x, y)$ в произвольной точке $y \in \mathbb{Z}^d$, общее число частиц $\mu(t, x)$ и их целочисленные моменты $m_n(t, x, y), m_n(t, x)$.
В этом случае $m_n(0, x, y) = \delta_y(x) \in \ell^2(\mathbb{Z}^d)$.
По определению

$$m_1(t, x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} m_1(t, x, y)$$

Из самосопряженности эволюционного оператора $\mathcal{H}$ следует, что

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^d} m_1(t, x, y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^d} m_1(t, y, x),$$

где последняя сумма будет соответствовать среднему числу частиц в точке $x$, которые в начальный момент времени находились в точках $y \in \mathbb{Z}^d$.

# Дуальная (в смысле первых моментов) задача

Яровая Е.Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде, 2007

Рассматривается ветвящееся случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d$ с одним центром генерации частиц, расположенным в нуле, с н.у.: при $t = 0$ на решетке имеется одна частица, расположенная в точке $y \in \mathbb{Z}^d$.
В частности (докритический случай), рассмотрена ситуация, когда интенсивность центра генерации частиц отрицательна.

## Один поглощающий источник

В случае, когда на решетке $\mathbb{Z}^d$ имеется один поглощающий источник (для определенности, в нуле), асимптотическое поведение $m_1(t,x)$ при $t \to \infty$ имеет следующий вид

$$d = 1: \quad m_1(t,x) \sim \frac{1 + b_0 g_x}{\gamma_1 \pi b_0 \sqrt{t}},$$

$$d = 2: \quad m_1(t,x) \sim \frac{1 + b_0 g_x}{\gamma_2 b_0 \ln t},$$

$$d \geq 3: \quad m_1(t,x) \sim \frac{1 + b_0(G_0(0,0) - G_0(x,0))}{1 + b_0 G_0(0,0)},$$

где $\gamma_1, \gamma_2$ — некоторые константы, а $g_x = \int\limits_0^\infty (p(s,0,0) - p(s,x,0))ds$.

Можно показать, используя обратные уравнения Колмогорова для переходных вероятностей, что $g_x$ — фундаментальное решение оператора $\mathcal{A}$, то есть может быть найдено из уравнения $\sum\limits_{x' \in \mathbb{Z}^d} a(x,x')g_{x'} = \delta_x(0)$.

# Один поглощающий источник. Простое случайное блуждание по прямой

В случае простого случайного блуждания $g_x$ является фундаментальным решением дискретного оператора Лапласа $\varkappa\Delta$.
В случае блуждания по прямой ($d = 1$):

$$\frac{\varkappa}{2}(g_{x-1} + g_{x+1}) - \varkappa g_x = \delta_x(0).$$

Откуда $g_x = \dfrac{|x|}{\varkappa}$, $\gamma_1 = \sqrt{2\pi}$, то есть

$$m_1(t,x) \sim \frac{1 + \frac{b_0}{\varkappa}|x|}{\sqrt{2}\pi^{3/2} b_0 \sqrt{t}}.$$

# $k$ поглощающих источников. Дуальная задача

Будем рассматривать сначала дуальную задачу, когда в начальный момент времени на решетке имеется одна частица, расположенная в точке $x \in \mathbb{Z}^d$, то есть задачу:

$$\frac{dm_1}{dt} = \mathcal{A}m_1 - b_0 \sum_{x_i \in K} \Delta_{x_i} m_1,$$

$$m_1(0, x, y) = \delta_x(y) \in \ell^2(\mathbb{Z}^d),$$

$$m_1(0, x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

Применим преобразование Лапласа, определяемое формулой

$$\widehat{m}_1(\lambda, x, y) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} m_1(t, x, y) dt,$$

к д.у. для $m_1(t, x, y)$, получим уравнение

$$-\delta_y(x) + \lambda \widehat{m}_1(\lambda, x, y) = \mathcal{A}\widehat{m}_1(\lambda, x, y) - b_0 \sum_{x_i \in K} \Delta_{x_i} \widehat{m}_1(\lambda, x, y).$$

Применяя к нему преобразование Фурье, определяемое формулой

$$\widetilde{\widehat{m}}_1(\lambda, \theta, y) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \widehat{m}_1(\lambda, x, y) e^{i(x,\theta)},$$

получаем уравнение

$$\widetilde{\widehat{m}}_1(\lambda, \theta, y) = \left( -b_0 \sum_{k \in K} \widehat{m}_1(\lambda, k, y) e^{i(k,\theta)} + e^{i(y,\theta)} \right) (\lambda - \varphi(\theta))^{-1},$$

где $\varphi(\theta)$ – преобразование Фурье переходных интенсивностей $a(z)$.

Применяя обратное преобразование Фурье и учитывая соотношения

$$\sum_{y} \widehat{m}_1(\lambda, x, y) = \widehat{m}_1(\lambda, x), \quad \sum_{y} G_\lambda(x, y) = \frac{1}{\lambda},$$

получаем

$$\widehat{m}_1(\lambda, x) = -b_0 \sum_{k \in K} \widehat{m}_1(\lambda, k) G_\lambda(x, k) + \frac{1}{\lambda}.$$

$$\widehat{m}_1(\lambda, x) = -b_0 \sum_{k \in K} \widehat{m}_1(\lambda, k) G_\lambda(x, k) + \frac{1}{\lambda}.$$

Тогда для $x_i \in K$ $\widehat{m}_1(\lambda, x_i) = \dfrac{\det D_i}{\det D}$,
где

$$D = \begin{pmatrix} 1 + b_0 G_\lambda(x_1, x_1) & b_0 G_\lambda(x_1, x_2) & \cdots & b_0 G_\lambda(x_1, x_k) \\ b_0 G_\lambda(x_2, x_1) & 1 + b_0 G_\lambda(x_2, x_2) & \cdots & b_0 G_\lambda(x_2, x_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_0 G_\lambda(x_k, x_1) & b_0 G_\lambda(x_k, x_2) & \cdots & 1 + b_0 G_\lambda(x_k, x_k) \end{pmatrix},$$

а $D_i$ — аналогичная матрицы, где $i$-й стобец заменен на $(\frac{1}{\lambda}, \dots, \frac{1}{\lambda})^T$.
Для $x \notin K$ добавляем к $D$ строчку $(b_0 G_\lambda(x, x_1), ..., b_0 G_\lambda(x, x_k), 1)$ и столбец $(0, \dots, 0, 1)^T$.

# Асимптотическое поведение функций Грина и их разностей

**$d = 1$**

$$p(t,x,y) \sim \frac{\gamma_1}{\sqrt{t}}, \quad G_\lambda(x,y) \sim \gamma_1 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

$$p(t,0,0) - p(t,x,0) \sim \frac{\widetilde{\gamma}_1(x)}{t^{3/2}}, \quad G_\lambda(0,0) - G_\lambda(x,0) \sim g_x < \infty.$$

**$d = 2$**

$$p(t,x,y) \sim \frac{\gamma_2}{t}, \quad G_\lambda(x,y) \sim \gamma_2 \ln \frac{1}{\lambda},$$

$$p(t,0,0) - p(t,x,0) \sim \frac{\widetilde{\gamma}_2(x)}{t^2}, \quad G_\lambda(0,0) - G_\lambda(x,0) \sim g_x < \infty.$$

# $k$ поглощающих источников, $d = 1$

Для $x_i \in K$ $\widehat{m}_1(\lambda, x_i) = \dfrac{\det D_i}{\det D}$.

$$D = E + b_0 \begin{pmatrix} G_\lambda(x_1, x_1) & G_\lambda(x_1, x_2) & \cdots & G_\lambda(x_1, x_k) \\ G_\lambda(x_2, x_1) & G_\lambda(x_2, x_2) & \cdots & G_\lambda(x_2, x_k) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_\lambda(x_k, x_1) & G_\lambda(x_k, x_2) & \cdots & G_\lambda(x_k, x_k) \end{pmatrix} = E + b_0 G.$$

$\det D = 1 + b_0 \mathrm{tr}\, G + b_0^2 \sum\limits_{i \neq j} \det G_{ij} + b_0^3 \sum\limits_{i<j<k} \det G_{ijk} + \cdots + b_0^{k-1} \det G \sim$
$1 + \dfrac{k\gamma_1\sqrt{\pi} b_0}{\sqrt{\lambda}} + \ldots$
Для $k = 2$ :

$$\det D \sim \frac{2b_0\gamma_1\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda}}(1 + b_0 g_{x_1 - x_2}).$$

# $k$ поглощающих источников, $d = 1$

Для $x_i \in K$ $\widehat{m}_1(\lambda, x_i) = \dfrac{\det D_i}{\det D}$.

$\det D_k = \dfrac{1}{\lambda} \det\left(E + b_0 G^k\right)$, где

$$G^k \sim \begin{pmatrix} g_{x_k - x_1} & g_{x_k - x_2} - g_{x_1 - x_2} & \cdots & g_{x_k - x_{k-1}} - g_{x_1 - x_{k-1}} \\ g_{x_k - x_1} - g_{x_2 - x_1} & g_{x_k - x_2} & \cdots & g_{x_k - x_{k-1}} - g_{x_2 - x_{k-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{x_k - x_{k-1}} - g_{x_{k-1} - x_1} & g_{x_k - x_{k-1}} - g_{x_{k-1} - x_2} & \cdots & g_{x_k - x_{k-1}} \end{pmatrix}.$$

$\det D_k = \dfrac{1}{\lambda}(1 + b_0 \operatorname{tr} G^k + b_0^2 \sum\limits_{i \neq j} G^k_{ij} + b_0^3 \sum\limits_{i<j<k} G^k_{ijk} + \cdots + b_0^{k-1} G^k)$.

Для $k = 2$ :

$$\det D_1 = \det D_2 \sim \frac{1}{\lambda}(1 + b_0 g_{x_1 - x_2}).$$

# $k$ поглощающих источников, $d = 1$

Для $x \notin K$ $\widehat{m}_1(\lambda, x) = \dfrac{\det D_x}{\det D}$.

$\det D_x = \dfrac{1}{\lambda} \det\left(E + b_0 G^x\right)$, где

$$G^x \sim \begin{pmatrix} g_{x-x_1} & g_{x-x_2} - g_{x_1-x_2} & \cdots & g_{x_k-x} - g_{x_1-x_k} \\ g_{x-x_1} - g_{x_2-x_1} & g_{x-x_2} & \cdots & g_{x_k-x} - g_{x_2-x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{x-x_1} - g_{x_k-x_1} & g_{x-x_2} - g_{x_k-x_2} & \cdots & g_{x-x_k} \end{pmatrix}.$$

$\det D_x = \dfrac{1}{\lambda}\left(1 + b_0 \operatorname{tr} G^x + b_0^2 \sum\limits_{i \neq j} G^x_{ij} + b_0^3 \sum\limits_{i<j<k} G^x_{ijk} + \cdots + b_0^{k-1} G^x\right)$.

Для $k = 2$ :

$$\det D_x \sim \frac{1}{\lambda}\left(1 + b_0(g_{x-x_1} + g_{x-x_2}) - b_0^2 g_{x_1-x_2}(g_{x_1-x_2} - g_{x-x_1} - g_{x-x_2})\right).$$

## $k$ поглощающих источников, $d = 1$

Для $x_i \in K$

$$\widehat{m}_1(\lambda, x_i) = \frac{\det D_i}{\det D} \sim \frac{1 + b_0 f_1(x_1, \dots, x_k)}{\sqrt{\lambda}(\gamma_1 \sqrt{\pi} k b_0 + \dots)}.$$

Для $x \notin K$

$$\widehat{m}_1(\lambda, x) = \frac{\det D_x}{\det D} \sim \frac{1 + b_0 f_1^x(x_1, \dots, x_k)}{\sqrt{\lambda}(\gamma_1 \sqrt{\pi} k b_0 + \dots)}.$$

**$k = 2, K = \{x_1, x_2\}$**

$$\widehat{m}_1(\lambda, x_i) \sim \frac{1 + b_0 g_{x_1 - x_2}}{2 b_0 \gamma_1 \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} (1 + b_0 g_{x_1 - x_2})} = \frac{1}{2 b_0 \gamma_1 \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda}}, \quad i = 1, 2,$$

$$\widehat{m}_1(\lambda, x) \sim \frac{1 + b_0 (g_{x - x_1} + g_{x - x_2}) - b_0^2 g_{x_1 - x_2} (g_{x_1 - x_2} - g_{x - x_1} - g_{x - x_2})}{2 b_0 \gamma_1 \sqrt{\pi} \sqrt{\lambda} (1 + b_0 g_{x_1 - x_2})}.$$

## $k$ поглощающих источников, $d = 1$

Для $x_i \in K$

$$m_1(t, x_i) \ \sim \ \frac{1 + b_0 f_1(x_1, \ldots, x_k)}{\sqrt{t}\sqrt{\pi}(\gamma_1 \sqrt{\pi} k b_0 + \ldots)}.$$

Для $x \notin K$

$$m_1(t, x) \ \sim \ \frac{1 + b_0 f_1^x(x_1, \ldots, x_k)}{\sqrt{t}\sqrt{\pi}(\gamma_1 \sqrt{\pi} k b_0 + \ldots)}.$$

**$k = 2, K = \{x_1, x_2\}$**

$$m_1(t, x_i) \sim \frac{1}{2 b_0 \gamma_1 \pi \sqrt{t}}, \quad i = 1, 2,$$

$$m_1(t, x) \sim \frac{1 + b_0(g_{x-x_1} + g_{x-x_2}) - b_0^2 g_{x_1 - x_2}(g_{x_1 - x_2} - g_{x - x_1} - g_{x - x_2})}{2 b_0 \gamma_1 \pi \sqrt{t}(1 + b_0 g_{x_1 - x_2})}.$$

## $k$ поглощающих источников, $d = 2$

Для $x_i \in K$

$$\widehat{m}_1(\lambda, x_i) = \frac{\det D_i}{\det D} \sim \frac{1 + b_0 f_2(x_1, \dots, x_k)}{\lambda \ln \lambda (k b_0 \gamma_2 + \dots)}.$$

Для $x \notin K$

$$\widehat{m}_1(\lambda, x) = \frac{\det D_x}{\det D} \sim \frac{1 + b_0 f_2^x(x_1, \dots, x_k))}{\lambda \ln \lambda (k b_0 \gamma_2 + \dots)}.$$

**$k = 2, K = \{x_1, x_2\}$**

$$\widehat{m}_1(\lambda, x_i) \sim \frac{1 + b_0 g_{x_1 - x_2}}{2 b_0 \gamma_2 \lambda \ln \lambda (1 + b_0 g_{x_1 - x_2})} = \frac{1}{2 b_0 \gamma_2 \lambda \ln \lambda}, \quad i = 1, 2,$$

$$\widehat{m}_1(\lambda, x) \sim \frac{1 + b_0 (g_{x - x_1} + g_{x - x_2}) - b_0^2 g_{x_1 - x_2} (g_{x_1 - x_2} - g_{x - x_1} - g_{x - x_2})}{2 b_0 \gamma_2 \lambda \ln \lambda (1 + b_0 g_{x_1 - x_2})}.$$

## $k$ поглощающих источников, $d = 2$

Для $x_i \in K$

$$m_1(t, x_i) \ \sim \ \frac{1 + b_0 f_2(x_1, \dots, x_k)}{\ln t (k b_0 \gamma_2 + \dots)}.$$

Для $x \notin K$

$$m_1(t, x) \ \sim \ \frac{1 + b_0 f_2^x(x_1, \dots, x_k))}{\ln t (k b_0 \gamma_2 + \dots)}.$$

**$k = 2, K = \{x_1, x_2\}$**

$$m_1(t, x_i) \sim \frac{1}{2 b_0 \gamma_2 \ln t}, \qquad i = 1, 2,$$

$$m_1(t, x) \sim \frac{1 + b_0(g_{x-x_1} + g_{x-x_2}) - b_0^2 g_{x_1-x_2}(g_{x_1-x_2} - g_{x-x_1} - g_{x-x_2})}{2 b_0 \gamma_2 \ln t (1 + b_0 g_{x_1-x_2})}.$$

## $k$ поглощающих источников

**Теорема**

При $t \to \infty$ верны следующие соотношения

$$d = 1: \quad m_1(t,x) \sim \frac{g_1(x, x_1, \dots, x_k)}{b_0\sqrt{t}},$$

$$d = 2: \quad m_1(t,x) \sim \frac{g_2(x, x_1, \dots, x_k)}{b_0 \ln t},$$

где функции $g_1(x, x_1, \dots, x_k)$, $g_2(x, x_1, \dots, x_k)$ могут быть явно выражены в терминах переходных вероятностей случайного блуждания, лежащего в основе процесса.

# Простое случайное блуждание по прямой

В случае простого случайного блуждания по прямой $g_x = \dfrac{|x|}{\varkappa}$, тогда

**$k = 1, K = \{0\}$**

$$m_1(t,x) \sim \frac{1 + \frac{b_0}{\varkappa}|x|}{\sqrt{2\pi} b_0 \sqrt{t}}.$$

**$k = 2, K = \{x_1, x_2\}$**

$$m_1(t,x) \sim \frac{1}{2b_0\sqrt{2\pi}\sqrt{t}}, \quad x \in [x_1, x_2],$$

$$m_1(t,x) \sim \frac{1 + \frac{b_0}{\varkappa}(x_1 + x_2 - 2x - \frac{2b_0}{\varkappa}(x_2 - x_1)(x - x_1))}{2b_0\sqrt{2\pi}\sqrt{t}(1 + \frac{b_0}{\varkappa}(x_2 - x_1))}, \quad x < x_1,$$

$$m_1(t,x) \sim \frac{1 + \frac{b_0}{\varkappa}(-x_1 - x_2 + 2x - \frac{2b_0}{\varkappa}(x_2 - x_1)(x_2 - x))}{2b_0\sqrt{2\pi}\sqrt{t}(1 + \frac{b_0}{\varkappa}(x_2 - x_1))}, \quad x > x_2.$$

# Вторые моменты

$$\frac{dm_2}{dt} = \mathcal{A}m_1(2m_1+1) + 2(m_2 - m_1^2 - m_1)a(0,0) - b_0 \sum_{x_i \in K} \Delta_{x_i}(2m_2 - m_1),$$

$$m_2(0,x) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}^d.$$

**Теорема**

При $t \to \infty$ верны следующие соотношения

$$d = 1: \quad m_2(t,x) \sim \frac{g_1(x, x_1, \dots, x_k)}{b_0\sqrt{t}},$$

$$d = 2: \quad m_2(t,x) \sim \frac{g_2(x, x_1, \dots, x_k)}{b_0 \ln t},$$

где функции $g_1(x, x_1, \dots, x_k)$, $g_2(x, x_1, \dots, x_k)$ могут быть явно выражены в терминах переходных вероятностей случайного блуждания, лежащего в основе процесса.

Спасибо за внимание!

Яровая Е.Б. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ М, 2007. ISBN 978-5-211-05431-8.

Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1,2. М.: Мир, 1984.