

ВВЕДЕНИЕ В ТОЧЕЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ НУЛЕЙ СЛУЧАЙНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

конспект доклада

1. НАПОМИНАНИЕ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

Пусть дано произвольное множество Λ и гильбертово пространство H комплекснозначных функций на нем. Пространство H называется **гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром**, если для любого элемента $z \in \Lambda$ функционал $F(\varphi) := \varphi(z)$ является непрерывным. В этом случае по теореме Рисса существует функция $K_z \in H$, такая что $\varphi(z) = \langle \varphi, K_z \rangle$. Функция двух переменных $K(z, w) = \psi_z(w)$ называется **воспроизводящим ядром** пространства H . Для всех $\varphi \in H, z \in \Lambda$ выполнено

$$\varphi(z) = \langle \varphi, K(\cdot, z) \rangle.$$

Свойства. 1) Производящее ядро $K(z, w)$ является комплексно-симметричной положительно определенной функцией.

2) Если $\{\varphi_k\}$ – ортонормированный базис в H , то выполнено

$$K(z, w) = \sum_k \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(w)}.$$

Теорема Мура-Ароншайна (Moore-Aronszajn). Пусть дана комплексно-симметричная положительно определенная функция $K(z, w)$ на $\Lambda \times \Lambda$. Тогда существует единственное гильбертово пространство функций на Λ , для которого K является воспроизводящим ядром.

С этого момента Λ всегда будет обозначать некоторую область в комплексной плоскости.

Пример. Пространство аналитических в комплексной области Λ функций φ , для которых выполнено

$$\int_{\Lambda} |\varphi(z)|^2 dm(z) < \infty,$$

и задано скалярное произведение

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\Lambda} \varphi(z) \overline{\psi(z)} dm(z) < \infty,$$

называется **пространством Бергмана** на Λ . В случае, когда Λ является единичным кругом $\mathbb{D}$, воспроизводящее ядро имеет вид

$$K(z, w) = \frac{1}{\pi(1 - z\overline{w})^2}$$

и называется **ядро Бергмана**, “обобщением” которого является **ядро Сеге**:

$$K(z, w) = \frac{1}{(1 - x\overline{y})^\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССОВСКОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Определение. Комплекснозначная случайная гауссовская величина с плотностью $\frac{1}{\pi}e^{-|z|^2}$ (по отношению к мере Лебега $m(z)$) называется **стандартной комплексной гауссовской с.в.** Эквивалентное определение: вещественная и мнимая части независимы и распределены как $\mathcal{N}(0, 1/2)$.

Определение. Пусть дана область $\Lambda \subset \mathbb{C}$ и последовательность линейно независимых функций $\varphi_k(z)$, аналитических в Λ , таких что

$$(1) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_k(z)|^2 < \infty \quad \text{локально равномерно в } \Lambda,$$

а также последовательность независимых стандартных комплексных гауссовских величин ξ_k . **Гауссовской аналитической функцией** называется ряд

$$(2) \quad f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(z).$$

Если $\Lambda = \mathbb{C}$, то говорят о **гауссовской целой функции**.

Замечание. Сходимость ряда (2) в $L_2(A)$ с вероятностью единица, где A — произвольное компактное подмножество в Λ , следует из обобщения неравенства Колмогорова для гильбертовых пространств:

$$\mathbf{P} \left(\sup_{k \leq n} \left\| \sum_{k=1}^n \xi_k \varphi_k \right\|_2 \geq \varepsilon \right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^n \|\varphi_k\|^2.$$

Далее, используя формулу Коши, можно показать, что ряд (2) сходится локально равномерно в Λ с вероятностью единица.

Из (2) сразу выводится **ковариационная функция** гауссовской аналитической функции:

$$(3) \quad C_f(z, w) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(w)}.$$

3. СВЯЗЬ С ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ АНАЛИЗОМ

Рассмотрим гильбертово пространство функций вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(z),$$

где $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ и $\varphi_k(z)$ удовлетворяют (1), со скалярным произведением

$$\left\langle \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(z), \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(z) \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k.$$

Оно очевидным образом является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром $\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(z) \overline{\varphi_k(w)}$. Учитывая (3), получаем, что каждой гауссовской аналитической функции, заданной на Λ , единственным образом соответствует гильбертово пространство аналитических функций на Λ с воспроизводящим ядром, совпадающим с ее ковариационной функцией.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ

Для произвольного борелевского подмножества $A \subset \mathbb{C}$ обозначим $n_f(A)$ число нулей f , попавших в A :

$$n_f(A) = \#\{f^{-1} \cap A\}.$$

Формула Эдельмана-Костлана ([1], [2, п.2.4]) Выполнено

$$\mathbf{E} n_f(A) = \frac{1}{4\pi} \int_A \Delta \log C_f(z, z) dm(z),$$

тем самым, плотность нулей (первая интенсивность) имеет вид

$$\rho_1(z) = \frac{1}{4\pi} \Delta \log C_f(z, z).$$

(Более подробный разбор с доказательством в одном из последующих докладов)

k -точечная корреляционная функция (k -я интенсивность). Обозначим

$$A = (\mathbf{E} f(z_i) f(\bar{z}_j))_{i,j=1}^k, \quad B = (\mathbf{E} f'(z_i) f(\bar{z}_j))_{i,j=1}^k, \quad C = (\mathbf{E} f'(z_i) f'(\bar{z}_j))_{i,j=1}^k.$$

Если A невырождена, то

$$\rho_k(z_1, \dots, z_k) = \frac{\text{perm}(C - BA^{-1}B^*)}{\det(\pi A)}.$$

Открытый вопрос (Steven Evans) Найти необходимые и достаточные условия того, что данная корреляционная функция является корреляционной функцией гауссовской целой функции.

Теорема Содина ([4], [2, п. 2.5]). **Плотность нулей определяет их распределение.** Если у двух гауссовских аналитических функций f и g , заданных в Λ , плотности нулей совпадают, то существует неслучайная аналитическая в Λ функция φ , не имеющая там нулей, такая что $f \stackrel{d}{=} \varphi g$. В частности, $f^{-1}(0) \stackrel{d}{=} g^{-1}(0)$. К сожалению, никакой дополнительной информации о распределении нулей кроме его единственности в общем случае из плотности вывести не удастся. (У Содина теорема сформулирована для многомерного случая. Более подробный разбор с доказательством в одном из последующих докладов.)

5. ПРИМЕРЫ

1) **Эллиптическая модель.** $\Lambda = \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{S}^2$.

$$f(z) = \sum_{k=1}^L \xi_k \sqrt{\frac{L(L-1)\dots(L-k+1)}{k!}} z^k, \quad L \in \mathbb{N},$$

$$C_f(z, w) = (1 + z\bar{w})^L.$$

2) **Плоская модель.** $\Lambda = \mathbb{C}$.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sqrt{\frac{L^k}{k!}} z^k, \quad L > 0,$$

$$C_f(z, w) = e^{Lz\bar{w}}.$$

3) **Гиперболическая модель.** $\Lambda = \mathbb{D}$.

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sqrt{\frac{L(L+1)\dots(L+k-1)}{k!}} z^k, \quad L > 0,$$

$$C_f(z, w) = \frac{1}{(1 - z\bar{w})^L} \quad (\text{ядро Сеге}).$$

Почему именно эти коэффициенты? В них распределения корней инвариантны относительно определенных групп преобразований ([5], [2, п. 2.3]). (Отсюда и названия моделей. Более подробный разбор в одном из последующих докладов)

Упражнения. 1) Вычислить плотности корней для этих трех моделей.
 2) Показать, что не существует гауссовской целой функции, нули которой образуют однородный пуассоновский точечный процесс.

6. ДЕТЕРМИНАНТНЫЙ ПРОЦЕСС

Рассмотрим гиперболическую модель с $L = 1$:

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k z^k, \quad |z| < 1.$$

Теорема. Нули f образуют детерминантный процесс с ядром Бергмана:

$$\rho_k(z_1, \dots, z_k) = \pi^{-k} \det \left(\frac{1}{(1 - z_i \bar{z}_j)^2} \right)_{i,j=1}^k.$$

Следствие. Нули отрицательно коррелированы (repulsion): $\rho_2(z_1, z_2) < \rho_1(z_1)\rho_1(z_2)$.
 (Более подробный разбор с доказательством в одном из последующих докладов)

Открытый вопрос (Balint Virág) Найти гауссовскую *целую* функцию, нули которой отрицательно коррелированы.

7. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ НОРМАЛЬНОСТЬ

Рассмотрим плоскую модель. Пусть $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ — некоторая $\mathcal{C}$ -гладкая функция с компактным носителем. Определим по ней случайную переменную (иногда называемую **линейной статистикой нулей**):

$$Z(h) = \int_{\mathbb{C}} h(z) n_f(dz) = \sum_{\{z: f(z)=0\}} h(z).$$

Теорема (Содин, Цирельсон [5]). Выполнено

$$\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{\kappa} \|\Delta h\|_2} \left(Z(h) - L \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} h(z) dm(z) \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1), \quad L \rightarrow \infty,$$

где константа κ определяется из соотношения

$$\text{Var } Z(h) = \frac{\kappa}{L} \|\Delta h\|_2^2 + o(L^{-1}) \quad L \rightarrow \infty.$$

Аналогичное утверждение верно для эллиптической и гиперболической моделей. (Более подробный разбор в одном из последующих докладов.)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Edelman and E. Kostlan: How many zeros of a random polynomial are real? Bull. Amer. Math. Soc. **32**, 1–37 (1995)
- [2] Ben J. Hough, Manjunath Krishnapur, Balint Virag and Yuval Peres: Zeros of Gaussian Analytic Functions and Determinantal Point Processes. AMS (2009)
- [3] Peres, Y. and Virág: Zeros of the i.i.d. Gaussian power series: a conformally invariant determinantal process. Acta. Math. **194**, 1–35 (2005)
- [4] M. Sodin: Zeroes of Gaussian analytic functions. Mathematical Research Letters **7**, 371–381 (2000)
- [5] M. Sodin, B. Tsirelson: Random complex zeroes, I. Asymptotic normality. Israel Journal of Mathematics **144**, 125–149 (2004)