О МЕРЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССА ЛИПШИЦА НА ОТРЕЗКЕ НЕКОТОРЫМИ СУММАМИ РИССА

П. Г. Поцейко,[1] Е. А. Ровба[2]

Гродненский государственный университет имени Янки Купалы (Республика Беларусь)

Величина
$$\mathcal{E}(\mathcal{K}, U_n)_X = \sup_{f\in\mathcal{K}} ||f(x) - U_n(f,x)||_X,$$
введенная С. М. Никольским [1], где $\mathcal{K}$ — некоторый класс в пространстве X, называется мерой приближения всего класса $\mathcal{K}$ методом U_n. Задача об отыскании асимптотических равенств для величин $\mathcal{E}(\mathcal{K}, U_n)_X$ была и остается одной из наиболее важных в теории аппроксимаций и в теории рядов Фурье. Эта задача имеет богатую историю, связанную с именами крупнейших специалистов в теории функций.

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(f)\varphi_n(x)$ — ряд Фурье функции f по ортогональной системе $\varphi_n(x)$ $n = 0, 1, \ldots$. Выражения
$$R_n^{\lambda,\delta}(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^{\lambda}\right)^{\delta} a_k(f)\varphi_k(x),\ \delta, \lambda > 0,\ n = 0, 1, 2, \ldots,$$
называются [2] суммами Рисса ортогональных рядов Фурье. В работе [3] был исследован вариант суммирования Рисса тригонометрических рядов Фурье с треугольной матрицей коэффициентов Λ, в которой $\lambda = 1$, $\delta = 2$. Этот метод приближений обладает рядом замечательных свойств. В частности, оператор, построенный на основании этого метода суммирования, имеет положительное ядро.

По аналогии с цитируемой работой, введем суммы Рисса, ассо-

[1] e-mail: pahamatby@gmail.com
[2] e-mail: rovba.ea@gmail.com

циированные с системой полиномов Чебышёва первого рода:

$$R_n^{1,2}(f,x) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n}(2(n-k)+1)s_k(f,x),$$
$$x \in [-1,1], \quad n = 0,1,2\ldots,$$

где $s_k(f,x)$, $k = 0,1,\ldots,n$, — частичные суммы ряда Фурье–Чебышёва.

Для сумм Рисса $R_n^{1,2}(f,x)$ имеет место [4] интегральное представление

$$R_n^{1,2}(f,x) =$$
$$= \frac{1}{4\pi(n+1)^2}\int_{-\pi}^{+\pi} f(\cos(t+u))\,\frac{(2n+2)\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2}\sin((n+1)t)}{\sin^3\frac{t}{2}}\,dv,$$
$$x = \cos u,$$

и оператор $R_n^{1,2}$ является положительным.

В докладе предполагается осветить результаты исследований приближений суммами Рисса на классах $H^{(\gamma)}[-1,1]$, $\gamma \in (0,1]$, функций, удовлетворяющих на отрезке $[-1,1]$ условию Липшица порядка γ с константой, равной единице. Изучается асимптотическое поведение при $n \to \infty$ меры приближения класса $H^{(\gamma)}[-1,1]$ введенными суммами Рисса, то есть следующей величины

$$\mathcal{E}(H^{(\gamma)}[-1,1],x,R_n^{1,2}) = \sup_{f\in H^{(\gamma)}[-1,1]} |f(x) - R_n^{1,2}(f,x)|.$$

Теорема 1. *Для приближений на классах $H^{(\gamma)}[-1,1]$ при $n \to \infty$ равномерно относительно $x \in [-1,1]$ справедливы асимптотические равенства:*

$$\mathcal{E}_n(H^{(\gamma)}[-1,1],x,R_n^{1,2}) =$$
$$= \frac{4\Gamma(\gamma)(\sqrt{1-x^2})^\gamma}{\pi(1-\gamma)(2-\gamma)(n+1)^\gamma}\sin\frac{\pi\gamma}{2} + o\left(\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{n+1}\right)^\gamma\right) + \delta_n^{(\gamma)}(x),$$

если $\gamma \in (0,1)$ и

$$\mathcal{E}_n(H^{(1)}[-1,1],x,R_n^{1,2}) =$$

$$= \frac{4\sqrt{1-x^2}\ln(n+1)}{\pi(n+1)} + o\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) + \delta_n^{(1)}(x),$$

если $\gamma = 1$, *где*

$$\delta_n^{(\gamma)}(x) = O\left(\left(\frac{\sqrt{|x|}}{n+1}\right)^{2\gamma}\right), \quad \gamma \in (0, 1/2), \quad \delta_n^{(\frac{1}{2})}(x) = O\left(\frac{\sqrt{|x|}\ln(n+1)}{n+1}\right),$$

$$\delta_n^{(\gamma)}(x) = O\left(\frac{|x|^\gamma}{n+1}\right), \quad \gamma \in (1/2, 1].$$

Список литературы

1. *Никольский С. М.* Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1940. – Т. 4, № 6. – С. 501–508.
2. Hardy G. H., Riesz M., *The general theory of Dirichlet's series*, / Cambridge University Press, 1915. 78 p.
3. Szász, O., *On the Cesáro and Riesz means of Fourier series*, // Compositio Mathematica, 1940, V. 7. Pp. 112–122.
4. Rouba, Y., Patseika P., Smatrytski K. *On a Riesz summation method of rational Fourier–Chebyshev integral operators and approximations of functions with a power singularity*, // Analysis math. 2025. Vol. 51, iss, 2. Pp. XXX–XXX.