Проективная геометрия.

АГ1◇1. Из скольких точек состоит **а)** проективное пространство $\mathbb{P}_n$ **б)** грассманиан $\mathrm{Gr}(k,n)$ над конечным полем из q элементов? К чему стремится это количество при $q \to 1$ (и фиксированных n, k)?

АГ1◇2 (рациональная нормальная кривая). Покажите, что все описанные ниже кривые $C \subset \mathbb{P}_n$ переводятся друг в друга подходящими линейными проективными изоморфизмами.

а) (кривая Веронезе) образ отображения $c_d : \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) \xhookrightarrow{\psi \mapsto \psi^d} \mathbb{P}(S^d U) = \mathbb{P}_d$, где U — 2-мерное векторное пространство однородных линейных форм от $t = (t_0, t_1)$, а $S^d U$ — пространство однородных многочленов степени d от $t = (t_0, t_1)$

б) образ отображения $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_n$ заданного в однородных координатах формулой $t = (t_0 : t_1) \longmapsto (f_0(t) : f_1(t) : \dots : f_n(t))$, где $f_\nu(t)$ — линейно независимые однородные многочлены степени n от t

в) образ отображения $\varphi_{p_0,p_1,\dots,p_n} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_n$ заданного в однородных координатах формулой $t = (t_0 : t_1) \longmapsto (1/\det(p_0,t) : 1/\det(p_1,t) : \dots : 1/\det(p_n,t))$, где $p_\nu = (\alpha_\nu : \beta_\nu) \in \mathbb{P}_1$ — попарно разные точки, и $\det(p_\nu, t) = \alpha_\nu t_1 - \beta_\nu t_0$

г) зафиксируем $n+3$ точки $p_1, p_2, \dots, p_n$, a, b, $c \in \mathbb{P}_n$, никакие $(n+1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящий через $n-1$ точек p_ν — все, кроме p_i, и зададим линейные проективные изоморфизмы $\psi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$ между этими пучками так, чтобы 3 гиперплоскости пучка ℓ_j, проходящие через точки a, b, c, переходили в аналогичные 3 гиперплоскости пучка ℓ_i; кривая

$$C = \bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \ldots \cap \psi_{n1}(H)\,.$$

АГ1◇3. Покажите, что через любые $n+3$ точки в $\mathbb{P}_n$, никакие $n+1$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, проходит единственная (с точностью до замены внутренней параметризации) рациональная нормальная кривая

АГ1◇4. Покажите, что два упорядоченных набора из $n+3$ линейно общих точек на $\mathbb{P}_n$ тогда и только тогда проективно эквивалентны, когда совпадают двойные отношения любых четвёрок соответственных точек в двух наборах точек на $\mathbb{P}_1$, получающиеся из исходных наборов точек на $\mathbb{P}_n$ проведением через них кривой Веронезе и отождествлением её с $\mathbb{P}_1 = \ell_1$ при помощи конструкции из зад. АГ1◇2г).

АГ1◇5 (плоские проекции скрученной кубики). Пусть $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(V^*)$ будет пространством линейных форм от (t_0, t_1) с точностью до пропорциональности, $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(S^3 V^*)$ — пространством кубических форм от (t_0, t_1). Опишите проекцию кубики Веронезе $C \subset \mathbb{P}_3$:

а) из точки t_0^3 на плоскость, порождённую $3\,t_0^2 t_1$, $3\,t_0 t_1^2$, t_1^3

б) из точки $3\,t_0^2 t_1$ на плоскость, порождённую t_0^3, $3\,t_0 t_1^2$, t_1^3

в) из точки $t_0^3 + t_1^3$ на плоскость, порождённую t_0^3, $3\,t_0^2 t_1$, $3\,t_0 t_1^2$

Вычислите параметрическое представление для кривой-проекции и нарисуйте, как она выглядит в различных аффинных картах, и выясните, будут ли у неё особые точки.

г) Покажите, что всякая рациональная кривая степени n на $\mathbb{P}_2$ является плоской проекцией кривой Веронезе $C_n \subset \mathbb{P}_n$ и докажите, что неособая плоская кубическая кривая не рациональна.

АГ1◇6. Напишите уравнение поверхности $S \subset \mathbb{P}_3$, заметаемой всеми касательными прямыми к рациональной нормальной кубике в $\mathbb{P}_3$ и найдите все особые точки этой поверхности.

АГ1◇7. Даны 4 попарно скрещивающиеся прямые **а)** в $\mathbb{CP}_3$ **б)** в $\mathbb{RP}_3$ **в)** в $\mathbb{C}^3$ **г)** в $\mathbb{R}^3$. Сколько прямых пересекает все четыре данные прямые? Найдите все возможные ответы и укажите, какие из них устойчивы при малых шевелениях четырёх данных прямых.

АГ1◇8. Покажите, что касательные гиперплоскости к гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют гладкую квадрику в двойственном пространстве $\mathbb{P}_n^\times$ и выразите матрицу Грама этой квадрики через матрицу Грама квадрики Q в двойственном базисе.

АГ1◇9. Обозначим через $S \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$ пространство особых коник на $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$. Покажите, что множество особых точек $\operatorname{Sing}(S)$ кубической поверхности S является образом отображения Веронезе $\mathbb{P}(V^*) \xhookrightarrow{v_2} \mathbb{P}_5$ и что для гладкой точки $q \in S$, отвечающей особой конике, распадающейся в объединение двух различных прямых $\ell_1 \cup \ell_2 \subset \mathbb{P}(V)$, касательное пространство T_qS к поверхности S в точке q состоит из всех коник, проходящих через точку $\ell_1 \cap \ell_2$.

АГ1◇10 (обобщение задачи зад. АГ1◇9). Покажите, что множество гладких точек поверхности $S \subset \mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2V^*)$, состоящей из особых квадрик в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$, состоит из квадрик $Q \subset \mathbb{P}_n$, имеющих ровно одну особую точку, и касательное пространство $T_QS \subset \mathbb{P}_N$ к поверхности S в такой точке Q состоит из всех квадрик $Q' \subset \mathbb{P}_n$, проходящих через особую точку квадрики Q.

АГ1◇11*. Фиксируем гладкую конику C. Покажите, что для любой коники $Q = V(q) \neq C$ множества **а)** $\{(a,b) \in C \times C \mid \widetilde{q}(a,b) = 0\}$ **б)** $\{(a,b) \in C \times C \mid (ab)$ касается $Q\}$ являются симметричными алгебраическими 2–2 соответствиями[1] на C, и что любое такое соответствие на C однозначно представляется как в виде (a), так и в виде (b).

АГ1◇12* (поризм Понселе). Фиксируем натуральное $n \geqslant 3$ и две гладких коники $Q \neq C$. Покажите, что если существует n-угольник, одновременно вписанный в C и описанный около Q, то такой многоугольник можно нарисовать с вершиной в произвольной точке $p \in C$.

АГ1◇13 (спинорное разложение и отображения Плюккера – Сегре – Веронезе).

а) Пусть $V = \operatorname{Hom}(U_-, U_+)$, где $\dim U_\pm = 2$. Покажите, что

$$V^{\otimes 2} = \underbrace{\Big(\big(S^2U_-^* \otimes S^2U_+\big) \oplus \big(\Lambda^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+\big) \Big)}_{S^2V} \bigoplus \underbrace{\Big(\big(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+\big) \oplus \big(\Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+\big) \Big)}_{\Lambda^2V} .$$

б) Пусть неособая квадрика $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ задаётся квадратичной формой g с поляризацией $\widetilde{g}$. Покажите, что квадрика $\Lambda^2G \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$, задаваемая квадратичной формой $\Lambda^2\widetilde{g}$, значение которой на разложимых бивекторах вычисляется по правилу

$$\Lambda^2\widetilde{g}(\, v_1 \wedge v_2 \,,\, w_1 \wedge w_2 \,) \overset{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \widetilde{g}(v_1, w_1) & \widetilde{g}(v_1, w_2) \\ \widetilde{g}(v_2, w_1) & \widetilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix} ,$$

тоже невырождена и пересекает квадрику Плюккера $P \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ в точности по множеству касательных прямых к квадрике $G \subset \mathbb{P}_3$.

в) Покажите, что плюккерово вложение $\operatorname{Gr}(2,V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V)$, отождествляющее $\operatorname{Gr}(2,V)$ с квадрикой Плюккера $P \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ переводит два семейства прямолинейных образующих квадрики Сегре $G \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\operatorname{Hom}(U_-, U_+))$ в пару непересекающихся гладких коник, высекаемых из квадрики Плюккера $P \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)$ парой непересекающихся (двумерных) плоскостей $\Lambda_- = \mathbb{P}\big(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+\big)$ и $\Lambda_+ = \mathbb{P}\big(\Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+\big)$, вложенных в $\mathbb{P}(\Lambda^2\operatorname{Hom}(U_-, U_+))$ согласно зад. АГ1◇13, причём обе эти коники являются образами квадратичных вложений Веронезе, т. е. имеется следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}(U_+) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"] & & \mathbb{P}(S^2U_+) \simeq \Lambda_+ \arrow[d, hook] \\
\mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- \arrow[u, "\pi_+"] \arrow[d, "\pi_-"'] \arrow[r, "\text{Сегре}", "\sim"'] & G \subset \mathbb{P}\operatorname{Hom}(U_-, U_+) \arrow[r, dashed, "\text{Плюккер}"] & P \subset \mathbb{P}\begin{pmatrix} \Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+ \\ \oplus \\ S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+ \end{pmatrix} \\
\mathbb{P}(U_-^*) \arrow[rr, hook, "\text{Веронезе}"'] & & \mathbb{P}(S^2U_-^*) \simeq \Lambda_- \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

[1] т. е. задаются во внутренних однородных координатах на C уравнением $f(a,b) = 0$, где $f(x,y) = f(y,x)$ однороден степени 2 как по $x = (x_0, x_1)$, так и по $y = (y_0, y_1)$