Алгебраические многообразия.

Обозначения. Для идеала I коммутативного кольца A через $\sqrt{I} = \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$ обозначается его *радикал*. Для подмножества $X \subset \mathbb{A}^n$ через $I(X) = \{f \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \;\forall p \in X\}$ обозначается идеал всех полиномов, зануляющихся всюду на X. Для идеала $J \subset \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ через $V(J) = \{p \in \mathbb{A}^n \mid f(p) = 0 \;\forall f \in J\}$ обозначается задаваемое им аффинное алгебраическое многообразие.

АГ2◇1. Для пары идеалов I, J кольца $A = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$ положим $K = \{ab \mid a \in I,\, b \in J\}$ и обозначим через IJ идеал, порождённый множеством K. Верно ли, что

а) $K = IJ$ итак уже является идеалом **б)** $K = I \cap J$ (кстати, является ли идеалом $I \cap J$?)
в) $IJ = I \cap J$ **г)** $1 \in I + J \Rightarrow IJ = I \cap J$ **д)** $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$
е) $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$ **ж)** $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$ **з)** $(I = \sqrt{I} \;\&\; J = \sqrt{J}) \;\Rightarrow\; IJ = \sqrt{IJ}$.

АГ2◇2. Докажите, что пересечение всех простых идеалов в произвольном коммутативном кольце с единицей совпадает с нильрадикалом[1] этого кольца?

АГ2◇3. Какие из следующих трёх колец нётеровы[2]: **а)** $A[[t]]$, где A нётерово
б) $\{p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$ при $|z| \leqslant 1\}$ **в)** $\{f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ сходящихся всюду в $\mathbb{C}\}$

АГ2◇4. Пусть $J = (xy, yz, zx) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$. Можно ли задать многообразие $V(J)$ двумя полиномиальными уравнениями?

АГ2◇5. Найдите какой-нибудь многочлен $f \in I(V(J)) \smallsetminus J$ для $J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \Bbbk[x, y]$.

АГ2◇6. Опишите $V(J) \subset \mathbb{A}^3$ и $I(V(J)) \subset \Bbbk[x, y, z]$ для идеала
а) $J = (xy, (x - y)z)$ **б)** $J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$

АГ2◇7. Пусть известны системы уравнений, задающих аффинные алгебраические многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ и $Y \subset \mathbb{A}^m$. **а)** Напишите систему уравнений, задающую $X \times Y \subset \mathbb{A}^{n+m}$
б) Покажите, что $X \times Y$ неприводимо, если X и Y неприводимы.

АГ2◇8 (топология Зарисского). Для аффинного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{A}^n$ положим[3] $\Bbbk[X] = \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$. Для каждого идеала $J \subset \Bbbk[X]$ положим $V(J) = \{p \in X \mid f(p) = 0 \;\forall f \in J\}$ и каждой функции $f \in \Bbbk[X]$ положим $\mathscr{D}_f = X \smallsetminus V(f)$. Покажите, что

а) подмножества $V(J) \subset X$, отвечающие всевозможным идеалам $J \subset \Bbbk[X]$, составляют полный набор замкнутых множеств некоторой топологии[4] на X

б) подмножества $\mathscr{D}_f \subset X$ с $f \in \Bbbk[X]$ образуют для неё базис открытых множеств

в) любое открытое покрытие любого открытого $U \subset X$ содержит конечное подпокрытие

АГ2◇9. Покажите, что проекция аффинной гиперповерхности $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ из любой точки $p \notin V(f)$ на любую гиперплоскость $H \not\ni p$ доминантна.

АГ2◇10. Покажите, что всякая аффинная гиперповерхность $V(f) \subset \mathbb{A}^n$ допускает конечную сюрьективную параллельную проекцию на гиперплоскость $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$.

АГ2◇11. Покажите, что образ любого регулярного доминантного морфизма алгебраических многообразий содержит плотное открытое по Зарисскому подмножество.

АГ2◇12 (геометрическое определение размерности). Покажите, что размерность проективного алгебраического многообразия $X \subset \mathbb{P}_n$ равна минимальному целому k, для которого существует $(n - k - 1)$-мерное проективное подпространство $L \subset \mathbb{P}_n$, не пересекающее X.

---

[1] напомню, что *нильрадикал* (т.е. радикал нулевого идеала) есть множество всех нильпотентных элементов кольца

[2] напомню, что коммутативное кольцо K называется *нётеровым*, если любой его идеал порождается конечным набором элементов или, что равносильно, если не существует бесконечных вправо цепочек строго вложенных идеалов $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \cdots$

[3] это фактор кольцо называется *координатной алгеброй* многообразия X

[4] она называется *топологией Зарисского*

АГ2◇13. Для d-мерного проективного многообразия $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ покажите, что $(n-d)$-мерные проективные подпространства $H \subset \mathbb{P}(V)$, пересекающие X в конечном числе точек, составляют открытое по Зарисскому подмножество в грассманиане[5] $\mathrm{Gr}(n+1-d, V)$.

Указание. Рассмотрите многообразие инцидентности $\Gamma = \{(x, H) \in X \times \mathrm{Gr}(n+1-d, V) \mid x \in H\}$, при помощи проекции $\Gamma \longrightarrow X$ покажите, что Γ является неприводимым алгебраическим многообразием, найдите его размерность, а затем исследуйте проекцию $\Gamma \longrightarrow \mathrm{Gr}(n+1-d, V)$.

АГ2◇14* (теорема Шевалле о конструктивности). Покажите, что образ любого регулярного морфизма алгебраических многообразий получается из некоторого конечного числа открытых по Зарисскому подмножеств при помощи конечного числа операций объединения, пересечения и перехода к дополнительному подмножеству.

АГ2◇15. Зафиксируем $(n+1)$ натуральных чисел $d_0, d_1, \dots, d_n$ и обозначим через

$$\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}\left(S^{d_i} V^*\right)$$

пространство гиперповерхностей степени d_i в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$. Покажите, что

а) множество инцидентности

$$\Gamma = \{(S_0, S_1, \dots, S_n,\, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \mathbb{P}_{N_1} \times \;\cdots\; \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in \bigcap_{\nu=0}^{n} S_\nu\}$$

является неприводимым проективным алгебраическим многообразием и найдите $\dim \Gamma$

б) существует единственный с точностью до умножения на ненулевую константу неприводимый многочлен R от коэффициентов набора однородных многочленов

$$F_0, F_1, \dots, F_n \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

степеней $d_0, d_1, \dots, d_n$, который обращается в нуль, если и только если имеется ненулевое решение у системы полиномиальных уравнений $F_\nu(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ (где $0 \leqslant \nu \leqslant n$). Как выглядит R для системы однородных линейных уравнений?

АГ2◇16. Обозначим через M проективизацию пространства матриц размера $m \times n$. При помощи подходящего многообразия инцидентности

$$\Gamma = \{(L, F) \mid L \subset \ker F\}$$

(где $L \subset \Bbbk^n$ — подпространство, а $F : \Bbbk^n \longrightarrow \Bbbk^m$ — линейный оператор, задаваемый матрицей из M) покажите, что рассматриваемые с точностью до пропорциональности матрицы ранга $\leqslant k$ образуют неприводимое проективное подмногообразие $M_k \subset M$, и найдите $\dim M_k$.

АГ2◇17. Покажите, что множество всех поверхностей 4-й степени $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$, на которых имеется хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве $\mathbb{P}(S^4 V^*)$ всех поверхностей 4-й степени.

[5] т. е. в многообразии всех $(n-d)$-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}(V)$