ЧИСЛЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ МЕРЫ НЕВЫПУКЛОСТИ α-МНОЖЕСТВ В ВИДЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ И МНОГОГРАННИКОВ

Д.Б. Давлетов, А.А. Ершов, В.Н. Ушаков

Международная конференция
«Теория функций и ее приложения»,
посвященная 120-летию со дня рождения
академика РАН Сергея Михайловича Никольского

Московская область, г. Долгопрудный, МФТИ
1 — 5 июля 2025 г.

Раздел 1: определение и основные свойства α-множеств

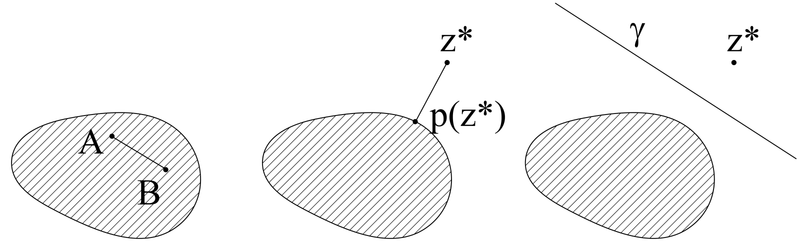
3. История развития теории α-множеств

1. **Ушаков В.Н., Успенский А.А., Фомин А.Н.** α-множества и их свойства / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-В2004.

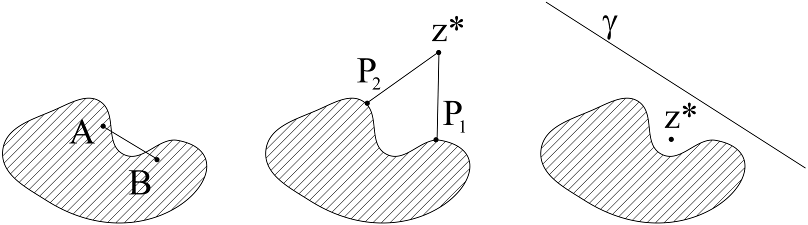
2. **Ушаков В.Н., Успенский А.А.** α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства // Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 95–120.

3. **Ушаков В.Н., Успенский А.А.** Теоремы об отделимости α-множеств в евклидовом пространстве // Труды ИММ. 2016. Т. 22, № 2. С. 277–291.

4. Определение и критерии выпуклых множеств



Определение   Теорема Каратеодори   Теорема об отделимости



5. Определение α-множества

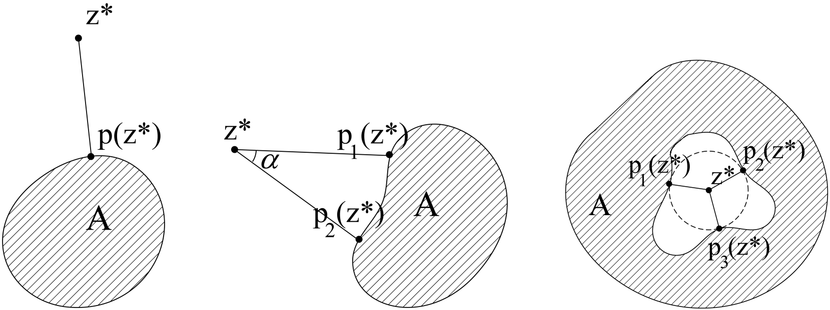


Рис. 2. Выпуклое множество (0-множество), α-множество и π-множество.

6. Определение α-множества

Для замкнутого множества $M \subset \mathbb{R}^n$ обозначим:

$\Omega_M(z^*)$ — множество всех метрических проекций $p(z^*)$ точки z^* на M;

$\mathrm{co}\Omega_M(z^*)$ — выпуклая оболочка множества $\Omega_M(z^*)$;

$\mathrm{con}(\mathrm{co}\Omega_M(z^*) - z^*) = \{h = \lambda(z - z^*) : \lambda \geqslant 0, z \in \mathrm{co}\Omega_M(z^*)\}$ — конус в $\mathbb{R}^n$, натянутый на множество $\mathrm{co}\Omega_M(z^*) - z^* = \{z - z^* : z \in \mathrm{co}\Omega_M(z^*)\}$;

$H_M(z^*)$ — множество всевозможных пар (h_*, h^*) ненулевых векторов h_* и h^* из $\mathrm{con}(\mathrm{co}\,\Omega_M(z^*) - z^*)$;

$\angle(h_*, h^*) = \arccos \dfrac{\langle h_*, h^* \rangle}{||h_*|| \cdot ||h^*||} \in [0, \pi]$ — угол между векторами h_* и h^*;

$$\alpha_M(z^*) = \max_{(h_*, h^*) \in H_M(z^*)} \angle(h_*, h^*) \in [0, \pi];$$

$$\alpha_M = \sup_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus M} \alpha_M(z^*) \in [0, \pi].$$

О п р е д е л е н и е 1 [1, 2]. Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое множество и $\alpha_M = \alpha$. Тогда множество M назовём *α-множеством*.

7. Основные свойства α-множеств

1) α-множество — односвязно (при $\alpha < \pi$)

2) $\alpha_A \geqslant \alpha_{A_\varepsilon}$, где A_ε — ε-окрестность множества A.
Если A — компакт, то $\alpha_{A_\varepsilon} \downarrow 0$ при $\varepsilon \to +\infty$.

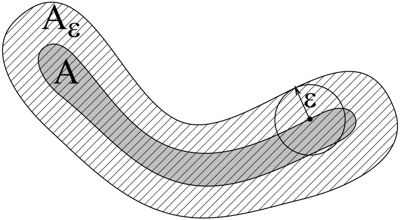


Рис. 3.

3) α-отделимость

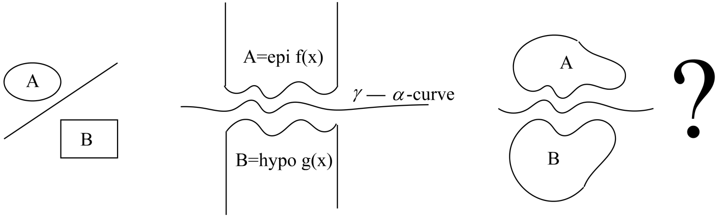


Рис. 4.

4) Пусть $M \subset \mathbb{R}^2$ — α-множество с границей в виде кривой конечной длины. Тогда $d(M, \mathrm{co}M) = \max\{h(M, \mathrm{co}M), h(\mathrm{co}M, M)\} = \max\limits_{x \in \mathrm{co}M} \rho(x, M) \leq \lambda(M)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$.

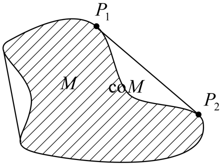


Рис. 5. Множество M и его выпуклая оболочка $\mathrm{co}\,M$.

Раздел 2: взаимосвязь с другими обобщениями выпуклых множеств

10. Слабо выпуклые множества по Ефимову-Стечкину

О п р е д е л е н и е 5 [6, 7]. Множество M в метрическогм пространстве X называется *слабо выпуклым по Ефимову-Стечкину* с постоянной $R > 0$, если существует непустое множество $A \subset X$ такое, что

$$M = \bigcap_{a \in A} (B(a, R))^c = \bigcap_{a \in A} (X \backslash B(a, R)),$$

где $B(a, R) = \{x \in X : \rho(x, a) < R\}$ — открытый шар радиуса R и с центром в точке a.

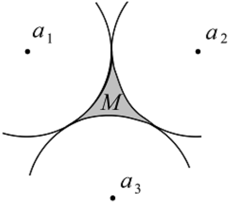


Рис. 6. Пример слабо выпуклого множества.

Применение: непрерывные селекторы многозначных отображений.

11. Множества, слабо выпуклые по Виалю

О п р е д е л е н и е 6 [7]. Пусть в метрическом пространстве X заданы две точки x_1, x_2, и задано число $R \geqslant \dfrac{\rho(x_1, x_2)}{2}$.

Множество

$$D_R(x_1, x_2) = \bigcap_{a \in X : \{x_1, x_2\} \subset B(a,R)} B(a, R)$$

называется *сильно выпуклым отрезком*.

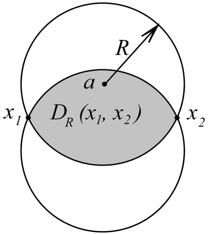


Рис. 7. Сильно выпуклый отрезок.

О п р е д е л е н и е 7 [7]. Множество M в метрическом пространстве X называется *слабо выпукло по Виалю с постоянной* R, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in M$ таких, что $0 < \rho(x_1, x_2) < 2R$, справедливо соотношение

$$M \cap \overset{o}{D}_R\,(x_1, x_2) = M \cap (D_R(x_1, x_2) \setminus \{x_1, x_2\}) \neq \varnothing.$$

12. Взаимосвязь α-множеств со слабо выпуклыми множествами

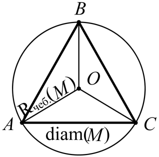
Теорема 2 [8]. Пусть связное множество M в $\mathbb{R}^2$ слабо выпукло по Ефимову-Стечкину с постоянной $R > \frac{1}{2}\mathrm{diam}(M)$. Тогда M есть α-множество с числом

$$\alpha \leqslant 2\arcsin\frac{\mathrm{diam}(M)}{2R}. \tag{1}$$

Теорема 3 [9]. Пусть замкнутое множество M в $\mathbb{R}^n$ слабо выпукло по Виалю с постоянной R, и пусть чебышевский радиус $R_{\text{чеб.}}(M) < R$. Тогда множество M является α-множеством с числом

$$\alpha \leqslant 2\arcsin\frac{R_{\text{чеб.}}(M)}{R}. \tag{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathrm{diam}(M) \leqslant R_{\text{чеб.}(M)}}$$



$$\mathrm{diam}(M) = 1,$$
$$R_{\text{чеб.}}(M) = \sqrt{3}/3$$

13. Усиление оценки (4)

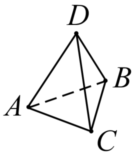


Рис. 8. $\mathrm{diam}(M) = 1$,

$R_{\text{чеб.}}(M) = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

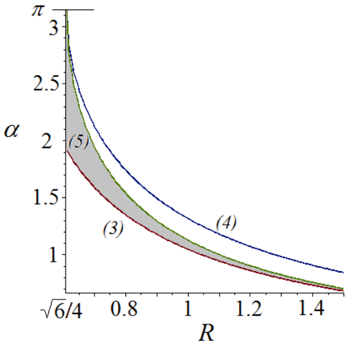


Рис. 9. Усиление оценки.

Теорема 4 [10]. Пусть замкнутое множество A в $\mathbb{R}^n$ слабо выпукло по Виалю с постоянной $R \geqslant R_{\text{чеб.}}(A)$. Тогда множество A является α-множеством с числом

$$\alpha \leqslant 2\arcsin \frac{\mathrm{diam}(A)}{2\sqrt{R^2 - R^2_{\text{чеб.}}(A) + \frac{1}{4}\mathrm{diam}^2(A)}}. \tag{3}$$

14. Коэффициент вогнутости Морделла

О п р е д е л е н и е 8 [11]. Пусть S — звездная центрально-симметричная относительно начала координат фигура на плоскости. Тогда коэффициентом вогнутости Морделла называется следующая величина:

$$\omega_S = \inf\left\{\omega : \frac{x+y}{2} \in \omega \cdot S \text{ для любых } x, y \in S\right\} \in [1, +\infty).$$

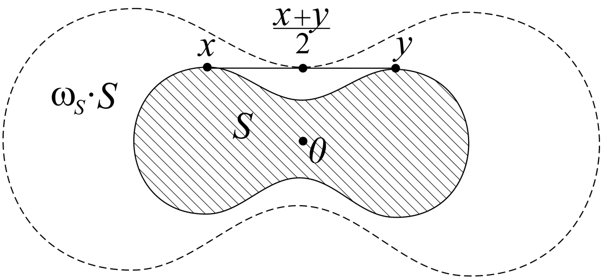


Рис. 10.

Применение: геометрия чисел.

15. Соотношение между α-множествами и множествами, имеющими конечный коэффициент вогнутости Морделла

Теорема 5 [11]. Пусть S — звёздная центрально-симметричная фигура на плоскости. Тогда выполняется неравенство

$$\omega_S \leqslant \frac{m_S}{m_S - 2r(S)\operatorname{tg}\frac{\alpha_S}{2}},$$

где $m_S = \min\limits_{x \in \partial S} ||x||$ — радиус наибольшего круга с центром в начале координат, который целиком помещается в S,

$R(T) = \inf\{R : T \subset B(z, R)$ для некоторого $z \in \mathbb{R}^2\}$ — чебышевский радиус множества T, т.е. радиус наименьшего круга, содержащего T,

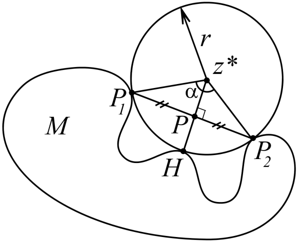
$r(S) = \sup\limits_{x \in \operatorname{co} M} \inf\limits_{\substack{T: T \subset M, \\ x \in \operatorname{co} T}} R(T)$ — внутренний радиус множества S.

16. α-Паравыпуклые множества Э. Майкла

О п р е д е л е н и е 9 [7]. Множество называется $\hat{\alpha}$-паравыпуклым множеством, если имеет место равенство

$$\hat{\alpha} = \sup_{z\in\mathbb{R}^n,\, r>0,\, M\cap B(z,r)\neq\varnothing} \frac{h(\mathrm{co}(M\cap B(z,r)), M\cap B(z,r))}{r} \in [0,1].$$

Здесь $B(z,r)$ — шар радиуса r с центром в точке z,
$\mathrm{co}\, A$ — выпуклая оболочка множества A („наименьшее“ выпуклое множество, содержащее A),
$\rho(A,B) = \max\limits_{x\in A} \rho(x,B)$ — хаусдорфово отклонение множества A от B.



$$M\cap B(z^*,r) = \{P_1, P_2, H\}, \quad r = |z^*H|,$$

$$h(\mathrm{co}(M\cap B(z^*,r)), M) = \rho(P,M) = |\rho H|$$

$$= r - |z^*P| = r - r\cos\frac{\alpha}{2} \;\Rightarrow\; \hat{\alpha} \geqslant 1 - \cos\frac{\alpha}{2}$$

Применение: непрерывная селекция отображений.

17. Соотношение между α-множествами и $\hat{\alpha}$-паравыпуклыми множествами Э. Майкла

Теорема 6 [12]. Если рассматривать α-множество как $\hat{\alpha}$-паравыпуклое множество, то

$$1 - \cos\frac{\alpha}{2} \leqslant \hat{\alpha}.$$

Доказательство:

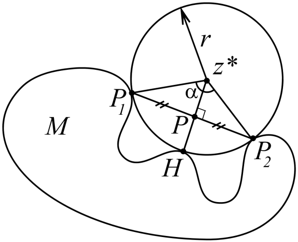


Рис. 11.

$$\hat{\alpha} = \sup_{\substack{z\in\mathbb{R}^n,\, r>0:\\ M\cap B(z,r)\neq\varnothing}} \frac{h(\mathrm{co}(M \cap B(z,r)), M)}{r}$$

Гипотеза 4. $\hat{\alpha} \leqslant \sin\dfrac{\alpha}{2}$?

18. Соотношение между α-множествами и $\hat{\alpha}$-паравыпуклыми множествами Э. Майкла

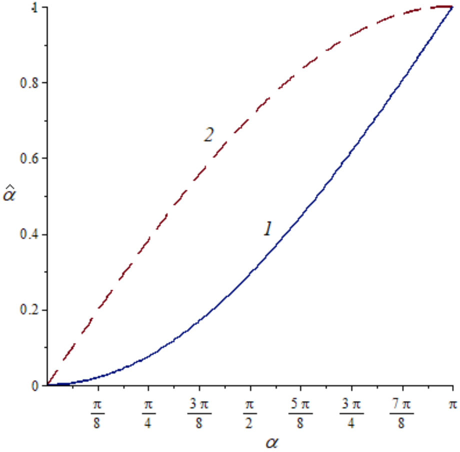


Рис. 12. Нижняя и верхняя оценки для меры невыпуклости $\hat{\alpha}$.
1 — график функции $y = 1 - \cos\dfrac{\alpha}{2}$, *2* — график функциий $y = \sin\dfrac{\alpha}{2}$.

Раздел 3: применение α-множеств в теории управления

20. Геометрия множеств достижимости

Допустим сначала, что система Σ имеет на промежутке $[t_0, T]$ вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \tag{4}$$

$x(t_0) \in X^{(0)}$ и $u \in P$, где $X^{(0)}$ и P — выпуклые компакты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^p$.

- Множества достижимости $X(t, t_0, X^{(0)})$ системы (4) имеют «хорошую» геометрическую структуру: от начального множества $X^{(0)}$ они наследуют свойство выпуклости.

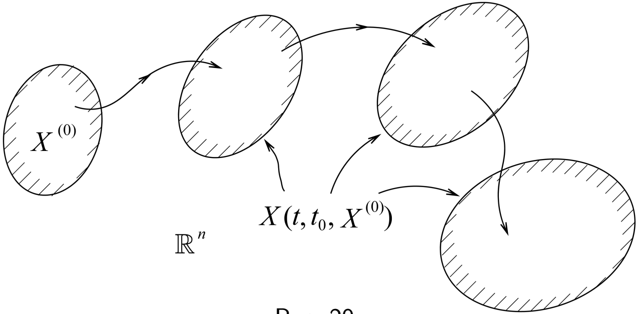


Рис. 20

21. Геометрия множеств достижимости

• Наличие такой «хорошей» геометрии у множеств достижимости $X(t, t_0, X^{(0)})$, $t \in [t_0, T]$ облегчает построение разрешающих конструкций в задачах управления, поскольку эти множества для всех точек y, лежащих вне их, обладают единственной проекцией $p(y)$.

Усложним несколько систему (4), а именно, рассмотрим управляемую систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + B(t)u, \tag{5}$$

$x(t_0) \in X^{(0)}$ и $u \in P$, где $X^{(0)}$ и P — выпуклые компакты в $\mathbb{R}^2$, $f(t, x)$ — нелинейная вектор-функция по t, x.

• У системы (5) при условии выпуклости множества $X^{(0)}$ множества достижимости $X(t, t_0, X^{(0)})$, $t \in [t_0, T]$ уже не наследуют выпуклость компакта $X^{(0)}$, что существенно усложняет построение разрешающих управлений.

22. Геометрия множеств достижимости

- Возникает естественный вопрос:

«Пусть начальное множество $X^{(0)}$ для системы Σ в $\mathbb{R}^n$ выпукло или по своей геометрии близко к выпуклому множеству. Как меняется степень невыпуклости множества $X(t, t_0, X^{(0)})$ с изменением t на промежутке $[t_0, T]$?»

- Более конкретно этот вопрос можно сформулировать так:

«Можно ли оценить сверху величину $\alpha_{X(t)}$ с изменением времени t на промежутке $[t_0, T]$?»

Здесь $X(t) = X(t, t_0, X^{(0)})$, $t \in [t_0, T]$.

Обсуждению этого вопроса предпошлём ещё одно определение.

О п р е д е л е н и е 10 [7, § 1.1, с. 18]. Множество A в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется *сильно выпуклым с постоянной* R, если существует непустое множество A_1 в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее $A = \bigcap\limits_{a \in A_1} \operatorname{cl} B(a, R)$.

23. Условия на систему (5)

Уточним условия, налагаемые на систему (5) в $\mathbb{R}^n$.

1) Вектор-функция $f(t,x)$ и матрица-функция $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ непрерывны на $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n$, выполняется $\left\| \dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x} \right\| \leqslant C \in (0,\infty)$ на $[t_0, T] \times \mathbb{R}^n$ и $\dfrac{\partial f(t,x)}{\partial x}$ липшицева по x с константой L;

2) Множество $X^{(0)}$ слабо выпукло по Ефимову-Стечкину с постоянной $R_0 > R_{\text{чеб.}}(X^{(0)})$;

3) Множество $B(t)P = \{B(t)u : u \in P\}$ сильно выпукло с постоянной r_p при $t \in [t_0, T]$;

4) Справедливо неравенство $r_p \leqslant CR_t$, где

$$R_t = \left(\frac{L}{6C} + \frac{1}{R_0}\right)^{-1} \exp\big(-6C(t - t_0)\big), \quad t \in [t_0, T]; \tag{6}$$

5) Справедливо неравенство

$$2R_{\text{чеб.}}(X^{(0)}) \leqslant \big(3e^{-C(T-t_0)} - 1\big) R_T. \tag{7}$$

24. Результат

Сформулируем утверждение, связывающее воедино три понятия: слабую выпуклость множеств в $\mathbb{R}^n$ по Ефимову-Стечкину, сильную выпуклость множеств и α-множества.

Теорема 7 (о росте степени невыпуклости множеств достижимости) [9].
Пусть система (5) *удовлетворяет условиям* $1) - 5)$. *Тогда для любого* $t \in [t_0, T]$ *справедлива оценка*

$$\alpha_{X(t)} \leqslant \arccos\left(1 - \frac{\left(2e^{C(t-t_0)}R_{\text{чеб.}}(X^{(0)}) + (e^{C(t-t_0)} - 1)R_t\right)^2}{2R_t^2}\right). \quad (8)$$

Приведём пример, иллюстрирующий теорему 4.

25. Пример

Пример 1. В качестве примера рассмотрим следующую управляемую систему, в некотором смысле обобщающую систему из известной задачи Цермело. Итак, пусть движение корабля описывается системой:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = s(x) + u(t), \quad t > 0, \\ x(0) \in X^{(0)} = \left\{ x = (x_1, x_2) : |x_1| \leqslant \frac{1}{2}, x_2 = 0 \right\}, \end{cases} \tag{9}$$

где t — время, $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ — координаты корабля, $X^{(0)}$ — множество возможных начальных позиций корабля, $s(x) = (s_1(x), s_2(x)) = \left(\sin \frac{x_2}{4}, \cos \frac{x_1}{4} \right)$ — скорость течения поверхности океана, $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ — собственная скорость корабля в спокойной воде.

Считаем, что корабль может управлять собственной скоростью в пределах $u(t) \in P = \{u = (u_1, u_2) : u_1^2 + u_2^2 \leqslant 1\}$.

26. Пример

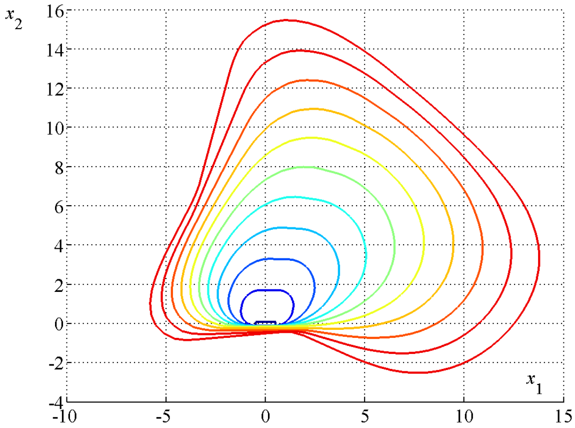


Рис. 13. Множества достижимости управляемой системы (9) на промежутке времени $t \in [0; 8]$

27. Пример

Применяя теорему 7, оценим степень невыпуклости множеств достижимости системы (9) и сравним теоретическую оценку с фактическими значениями.

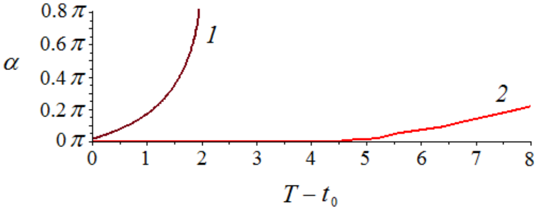


Рис. 14. Сравнение меры невыпуклости α множеств достижимости системы (9) и её оценки. *1* — оценка, *2* — экспериментально измеренные значения α

Раздел 4: численное вычисление меры невыпуклости α-множеств по их пиксельному представлению

29. О численном вычислении α

• В случае имеющейся аппpиорной оценки слабой выпуклости множества достижимости [6, теорема 3.6.2] представляется возможным приближённое вычисление меры невыпуклости α по его пиксельному представлению.

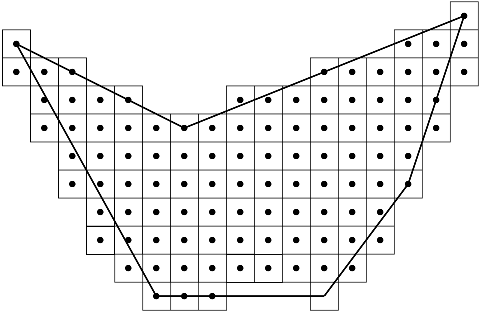


Рис. 15. Этап I: восстановление границы по пиксельному представлению множества

30. Этап II. вычисление меры невыпуклости многоугольника в $\mathbb{R}^2$ или многогранника в $\mathbb{R}^3$

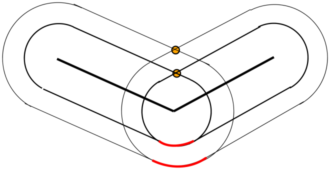


Рис. 16. Описание алгоритма

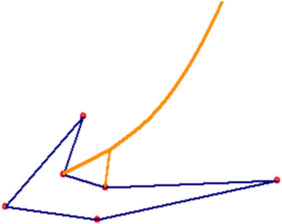


Рис. 17. Результат действия алгоритма ($\alpha = 0.619\pi$)

31. Этап II. вычисление меры невыпуклости многоугольника

Свойство 2 [2]. Функция $\alpha_A(z)$, $z \in \mathbb{R}^n \setminus A$, полунепрерывна сверху.

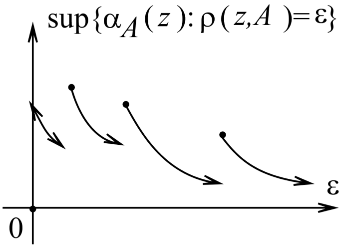


Рис. 18. Общий вид полунепрерывной сверху функции
$f(\varepsilon) = \sup\{\alpha_A(z) : \rho(z, A) = \varepsilon\}$

Численный метод: $\alpha_M = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus M} \alpha_M(z^*) \approx \sup\limits_{z^* : \rho(z^*, M) = \varepsilon k, k=1,2,3,\ldots} \alpha_M(z^*)$

32. К обоснованию сходимости

• Заметим, что в отиличие от исходного множества достижимости полученный многоугольник может уже не быть α-множеством (рис. 26).

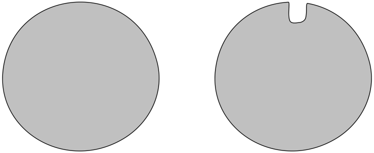


Рис. 19. Выпуклое 0-множество и максимально невыпуклое π-множество

• Однако, любое слабо выпуклое по Виалю с постоянной R множество обладает так называемым чебышёвским слоёв толщины R, для всех точек из которого существует ровно одна метрическая проекция на это множество [7, теорема 1.7.1],

33. К обоснованию сходимости

• Иными словами, выполняется

Лемма 1. *Если $A \subset \mathbb{R}^n$ — замкнутое, слабо выпуклое по Виалю с постоянной R множество, то*

$$\alpha_A = \alpha_A^{(R)},$$

где $\alpha_A = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A} \alpha_A(z^*), \quad \alpha_A^{(R)} = \sup\limits_{z^* \in \mathbb{R}^n \setminus A_R} \alpha_A(z^*).$

• В свою очередь, мера невыпуклости $\alpha_A^{(R)}$ устойчива к малым (в хаусдорфовой метрике) изменениям границы α-множества.

• Отметим, что многоугольники и многогранники обладают своего рода *псевдочебышевским слоем* некоторой толщины R, то есть для них также выполняется равенство мер невыпуклости $\alpha_A = \alpha_A^{(R)}$.

34. К обоснованию сходимости

Лемма 2. *Пусть число $R > 0$, A и B — замкнутые множества в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\alpha_A^{(R)} \to \alpha_B^{(R)}$ при $A \to B$ в хаусдорфовой метрике. а именно, если хаусдорфово расстояние $d(A, B) = \varepsilon$, то*

$$|\alpha_B^{(R)} - \alpha_A^{(R)}| \leqslant 2\arccos\left(1 - \frac{(2R^2 + 2R\varepsilon)}{(2r^2 + 2r\varepsilon)}\left(1 - \cos\frac{\alpha_A^{(R)}}{2}\right)\right) - \alpha_A^{(R)},$$

где $r = \dfrac{(2R^2 + 2R\varepsilon)\left(1 - \cos\dfrac{\alpha_A^{(R)}}{2}\right)}{4\varepsilon + 2R\left(1 - \cos\dfrac{\alpha_A^{(R)}}{2}\right)}$.

• Из приведённых утверждений вместе с полунепрерывностью сверху функции $\alpha_A(z)$ по $z \in \mathbb{R}^2$ (см. [3, свойство 1.2]) следует сходимость рассматриваемой схемы приближённого вычисления меры невыпуклости слабо выпуклых α-множеств по их конечноточечным аппроксимациям.

35. Список литературы

1. Успенский А.А., Ушаков В.Н., Фомин А.Н. α-множества и их свойства / ИММ УрО РАН. Екатеринбург, 2004. 62 с. Деп. в ВИНИТИ 02.04.2004, № 543-В2004.

2. Ушаков В.Н., Успенский А.А. α-множества в конечномерных евклидовых пространствах и их свойства //Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки. 2016. Т. 26, вып. 1. С. 95–120.

3. Ушаков В.Н., Успенский А.А. Теоремы об отделимости α-множеств в евклидовом пространстве // Тр. ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 277–291.

4. Ushakov V.N., Ershov A.A., Pershakov M.V. Counterexamples in the theory of α-sets. In book: Bykadorov I., Strusevich V., Tchemisova T. (eds) Mathematical Optimization Theory and Operations Research. MOTOR 2019. Communications in Computer and Information Science, vol. 1090. Springer, Cham, pp. 329-340.

36. Список литературы

5. Ершов А.А., Кувшинов О.А. О свойствах пересечения α-множеств // Изв. ИМИ УдГУ. 2020. Т. 55. С. 79–92.

6. Стечкин С.Б., Ефимов Н.В. Опорные свойства множеств в банаховых пространствах и чебышевские множества // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 2. С. 254–257.

7. Иванов Г.Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. М.: Физматлит, 2006. 352 с.

8. Ушаков В.Н., Ершов А.А. Оценка роста степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем в терминах α-множеств // Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления. 2020. Т. 495. С. 73–79.

37. Список литературы

9. Ушаков В.Н., Ершов А.А., Матвийчук А.Р. Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем // Труды МИАН. 2021. Т. 315. С. 261–270.

10. Ушаков В.Н., Ершов А.А. Об оценке степени невыпуклости множеств достижимости управляемых систем // Тр. ИММ УрО РАН. 2024. Т. 30, № 4. С. 276–285.

11. Грубер П.М., Леккеркеркер К.Г. Геометрия чисел. М.: Наука, 2008. 728 с.

12. Ершов А.А., Першаков М.В. О соотношении альфа-множеств с другими обобщениями выпуклых множеств // VI Информационная школа молодого ученого : сб. науч. тр. / отв. ред. П. П. Трескова ; сост. А. И. Кирсанова, Ю. Д. Прокофьева, А. С. Павлова. Екатеринбург, 2018. 217 с. — С. 143–150.

Спасибо за внимание!