НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

ЗАЙЦЕВА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

к.ф.-м.н., доцент кафедры общей математики
факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова

Международная конференция
“ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ”,
посвящённая 120-летию со дня рождения академика РАН
Сергея Михайловича Никольского
1 – 5 июля 2025 г.

Рассмотрим в $D = \{(x,t):\ x \in \mathbb{R},\ t > 0\}$ уравнение

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + b\,u(x-h,t) = 0, \qquad (1)$$

где $a > 0$, b, $h \neq 0$ — заданные действительные числа.

Определение.

Дифференциально-разностным называется уравнение, содержащее дифференциальные операторы и операторы сдвига.

Условие положительности вещественной части символа дифференциально-разностного оператора в уравнении (1):

$$a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0 \quad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

$$D = \{(x,t) : \, x \in \mathbb{R}, \, t > 0\}, \quad \overline{D} = \{(x,t) : \, x \in \mathbb{R}, \, t \geqslant 0\}$$

Постановка задачи Коши для уравнения (1):

$$u(x,t) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}),$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + b\, u(x-h,t) = 0, \quad (x,t) \in D, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

финитные функции

$$u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_1(x) \in C^1(\mathbb{R}).$$

Приложения дифференциально-разностных уравнений:

- механика деформируемого твердого тела при изучении упругопластических процессов, многослойных оболочек и пластин;
- релятивистская электродинамика;
- процессы вихреобразования и формирования сложных когерентных пятен;
- задачи, связанные с плазмой;
- моделирование колебаний кристаллической решетки;
- нелинейная оптика;
- нейронные сети;
- популяционная динамика в математической биологии;
- экологические и экономические процессы;
- теория автоматического управления.

Систематическое изучение обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом было начато с 40-х гг. XX века.

А.Д. Мышкис, Э. Пинни, Р. Беллман, К.Л. Кук, Дж. Хейл, Г.А. Каменский, Л.Э. Эльсгольц.

Теория дифференциально-разностных уравнений с частными производными (с 80-х гг. XX века по настоящее время).

А.Л. Скубачевский, В.В. Власов, А.Б. Муравник, В.Ж. Сакбаев.

$$D = \{(x,t) : \, x \in \mathbb{R}, \, t > 0\}, \quad \overline{D} = \{(x,t) : \, x \in \mathbb{R}, \, t \geqslant 0\}$$

Постановка задачи Коши для уравнения (1):

$$u(x,t) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}),$$

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + b\, u(x-h,t) = 0, \quad (x,t) \in D, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

финитные функции

$$u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_1(x) \in C^1(\mathbb{R}).$$

Условие эллиптичности дифференциально-разностного оператора в уравнении (1):

$$a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0 \quad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Владимиров, В.С. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1981.

$$\mathcal{E}_{tt}(x,t) - a^2\mathcal{E}_{xx}(x,t) + b\,\mathcal{E}(x-h,t) = \delta(x,t)$$

Фундаментальное решение

Решение $\mathcal{E}(x,t)$ уравнения — *фундаментальное решение* линейного дифференциального оператора с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + b\,R,$$

где R — оператор сдвига, действующий по правилу

$$R\mathcal{E}(x,t) = \mathcal{E}(x-h,t).$$

Преобразование Фурье по переменной x

$$\widehat{\mathcal{E}}(\xi,t) := F_x[\mathcal{E}(x,t)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x,t)e^{i\xi x}\,dx$$

Формулы

$$F_x\left[\frac{\partial^{\alpha+\beta}\mathcal{E}(x,t)}{\partial x^\alpha \partial t^\beta}\right] = (-i\xi)^\alpha \frac{\partial^\beta \widehat{\mathcal{E}}(\xi,t)}{\partial t^\beta},$$

$$F_x[\mathcal{E}(x-h,t)] = e^{ih\xi}\widehat{\mathcal{E}}(\xi,t), \quad F_x[\delta(x,t)] = 1(\xi)\delta(t)$$

Уравнение в образах Фурье

$$\widehat{\mathcal{E}}_{tt}(\xi,t) + \left(a^2\xi^2 + b\,e^{ih\xi}\right)\widehat{\mathcal{E}}(\xi,t) = 1(\xi)\delta(t) \qquad (4)$$

Уравнение в образах Фурье

$$\widehat{\mathcal{E}}_{tt}(\xi,t) + \left(a^2\xi^2 + b\,e^{ih\xi}\right)\widehat{\mathcal{E}}(\xi,t) = 1(\xi)\delta(t) \tag{4}$$

Решение уравнения (4) известно:

$$\widehat{\mathcal{E}}(\xi,t) = \theta(t)Z(t),$$

где $Z(t)$ — решение задачи

$$Z''(t) + \left(a^2\xi^2 + b\,e^{ih\xi}\right)Z(t) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}, \tag{5}$$

$$Z(0) = 0, \quad Z'(0) = 1. \tag{6}$$

Решение задачи (5), (6):

$$Z(t) = \frac{\sin\left(\rho(\xi)e^{i\,\varphi(\xi)}t\right)}{\rho(\xi)e^{i\,\varphi(\xi)}}$$

Решение уравнения в образах Фурье

$$\widehat{\mathcal{E}}(\xi,t) = \theta(t)\frac{\sin\left(\rho(\xi)e^{i\,\varphi(\xi)}t\right)}{\rho(\xi)e^{i\,\varphi(\xi)}}$$

Обозначения:

$$\rho(\xi) := \left[\left(a^2\xi^2 + b\cos\left(h\xi\right)\right)^2 + b^2\sin^2\left(h\xi\right)\right]^{1/4}, \tag{7}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{b\sin\left(h\xi\right)}{a^2\xi^2 + b\cos\left(h\xi\right)}. \tag{8}$$

Обратное преобразование Фурье

$$\mathcal{E}(x,t) = F_\xi^{-1}[\widehat{\mathcal{E}}(\xi,t)] = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\widehat{\mathcal{E}}(\xi,t)e^{-ix\xi}\,d\xi$$

Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора $\partial^2/\partial t^2 - a^2\,\partial^2/\partial x^2 + b\,R$:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\sin\left(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\xi\right)}{\rho(\xi)}e^{t\,G_1(\xi)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\xi\right)}{\rho(\xi)}e^{-t\,G_1(\xi)}\right]d\xi \qquad (9)$$

Обозначения:

$$G_1(\xi) := \rho(\xi)\sin\varphi(\xi), \quad G_2(\xi) := \rho(\xi)\cos\varphi(\xi)$$

$$\rho(\xi) := \left[\left(a^2\xi^2+b\cos\left(h\xi\right)\right)^2 + b^2\sin^2\left(h\xi\right)\right]^{1/4}$$

$$\varphi(\xi) := \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{b\sin\left(h\xi\right)}{a^2\xi^2+b\cos\left(h\xi\right)}$$

Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора $\partial^2/\partial t^2 - a^2\,\partial^2/\partial x^2 + b\,R$:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\sin\left(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\xi\right)}{\rho(\xi)}e^{t\,G_1(\xi)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\xi\right)}{\rho(\xi)}e^{-t\,G_1(\xi)}\right]d\xi \qquad (9)$$

Подынтегральная функция не имеет особенностей в точке $\xi = 0$:

$$\varphi(\xi)=0,\quad G_1(\xi)=0,\quad \rho(\xi)=\sqrt{b},\quad G_2(\xi)=\sqrt{b}\quad (b>0)$$
$$\frac{1}{\sqrt{b}}\left[\sin\left(\sqrt{b}t+x\xi\right)+\sin\left(\sqrt{b}t-x\xi\right)\right]$$

Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора $\partial^2/\partial t^2 - a^2\,\partial^2/\partial x^2 + b\,R$:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\sin\left(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\xi\right)}{\rho(\xi)}e^{t\,G_1(\xi)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\xi\right)}{\rho(\xi)}e^{-t\,G_1(\xi)}\right]d\xi \qquad (9)$$

При $\xi \to +\infty$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{b\sin\left(h\xi\right)}{a^2\xi^2+b\cos\left(h\xi\right)} \to 0,$$

$$\rho(\xi) = \left[\left(a^2\xi^2+b\cos\left(h\xi\right)\right)^2+b^2\sin^2\left(h\xi\right)\right]^{1/4} \sim \quad a\xi,$$

$$G_1(\xi) = \rho(\xi)\sin\varphi(\xi) \to 0, \quad G_2(\xi) = \rho(\xi)\cos\varphi(\xi) = O(a\xi)$$

Фундаментальное решение линейного дифференциального оператора $\partial^2/\partial t^2 - a^2\,\partial^2/\partial x^2 + b\,R$:

$$\mathcal{E}(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{+\infty}\left[\frac{\sin\left(t\,G_2(\xi)+\varphi(\xi)+x\xi\right)}{\rho(\xi)}e^{t\,G_1(\xi)} + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\left(t\,G_2(\xi)-\varphi(\xi)-x\xi\right)}{\rho(\xi)}e^{-t\,G_1(\xi)}\right]d\xi \qquad (9)$$

При $\xi \to +\infty$

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha\xi)}{\xi}d\xi = \begin{cases} \pi/2, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha = 0, \\ -\pi/2, & \alpha < 0. \end{cases}$$

Теорема.

При выполнении условия

$$a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0 \quad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{3}$$

функция

$$u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\tau,t)u_0(\tau)\,d\tau + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(x-\tau,t)u_1(\tau)\,d\tau, \tag{10}$$

где $\mathcal{E}(x,t)$ определяется формулой (9), является единственным решением задачи (1), (2).

При $b = 0$ в уравнении (1) — задача Коши в D:

$$u(x,t) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}),$$
$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in D,$$
$$u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), \quad x \in \mathbb{R},$$
$$u_0(x) \in C^2(\mathbb{R}), \quad u_1(x) \in C^1(\mathbb{R})$$

Из формулы (10) вытекает формула Даламбера

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_0(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\tau)\,d\tau =$$
$$= \frac{1}{2}[u_0(x+at) + u_0(x-at)] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} u_1(\tau)\,d\tau$$

Выполнение условия

$$a^2\xi^2 + b\cos(h\xi) > 0 \quad \text{для любого} \quad \xi \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Утверждение

Условие (3) выполняется для всех значений $\xi \in \mathbb{R}$, если коэффициенты a, b и сдвиг h уравнения

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) + b\,u(x-h,t) = 0 \tag{1}$$

удовлетворяют неравенствам

$$0 < b \leqslant \frac{2a^2}{h^2}.$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!