ОБРАТИМОСТЬ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

М. В. Кабанко[1]

Курский государственный университет

Эта работа посвящена изучению обратимости операторов, действующих в гильбертовой паре. Мы рассматриваем некоторые общие условия обратимости операторов, действующих в регулярной гильбертовой паре, которая, в свою очередь, представляется в виде прямой суммы векторзначных последователдьностей.

Определение 1. (см. [1]**)** Представлением операторной алгебры $\mathcal{A}$ называется пара (H_θ, θ), где H_θ некоторое гильбертово пространство, называемое пространством представления, а θ — гомоморфизм вида

$$\theta : \mathcal{A} \to B(H_\theta).$$

Представление называется точным если гомоморфизм θ инъективен.

Определение 2. (см. [1]) Представление (H_θ, θ) операторной алгебры $\mathcal{A}$ называется топологически неприводимым (или неприводимо действует в H_θ) если инвариантными относительно $\mathcal{A}$ подпространствами пространства H_θ являются только тривиальные подпространства, т.е. 0 и H_θ.

Определение 3. (см. [2]) Два банаховых пространства X_0 и X_1 образуют банахову пару, если они непрерывно вложены в некоторое отделимое топологическое пространство $\mathcal{X}$. Банахова пара $\{X_0, X_1\}$ называется регулярной, если пересечение пространств $X_0 \cap X_1$ всюду плотно в пространствах X_0 и X_1.

Будем рассматривать гильбертову пару

$$\overline{H} = \left\{ l_2(2^{\frac{n}{2}} G_n), l_2(2^{-\frac{n}{2}} G_n) \right\}.$$

[1] e-mail: kabankom@gmail.com

Эта пара изоморфна паре $\left\{l_2(G_n),\, l_2(2^{-n}G_n)\right\}$ (см. [3]). Будем рассматривать условия обратимости линейных ограниченных операторов, которые действуют в гильбертовой паре $\overline{H} = \left\{l_2(2^{\frac{n}{2}}G_n),\, l_2(2^{-\frac{n}{2}}G_n)\right\}$. Любой такой оператор можно представить в виде

$$A = D + \sum_{k\neq 0} A_k, \tag{1}$$

где D — оператор, соответствующий главной диагонали матричного представления оператора A, а операторы A_k соответсвуют диагоналям, которые «параллельны» главной (см. [4]).

Теорема 1. *Пусть оператор A действует в гильбертовой паре $\overline{H}$ и имеет представление* (1). *Будем полагать, что диагональный оператор D обратим в пространстве $l_2(G_n)$ и выполняется неравенство*

$$\|D^{-1}\|_{l_2(G_n)} < \frac{\sqrt{2}-1}{2\|A\|_{B(\overline{H})}}\,.$$

Тогда оператор A также будет обратим в пространстве $l_2(G_n)$.

Список литературы

1. Murphy G.J., *C^*-algebras and operator theory*, Academic Press, San Diego (1990). URL: https://www.elsevier.com/books/c-algebras-and-operatortheory/murphy/978-0-08-092496-0 .
2. Bergh J., Löfström J., *Interpolation Spaces. An introduction.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1976).
3. Ovchinnikov V.I., *Operator ideals and interpolation in Hilbert couples.* // Вестник ВГУ. Физика. Математика. – 2014. – т. 2. – сс. 142–161. URL: http://www.vestnik.vsu.ru/pdf/physmath/2014/02/2014-02-13.pdf
4. *Кабанко М.В.* Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре. – Труды математического факультета ВГУ. – 2001. – т. 6. – сс. 54–60.