О КОСОСОПРЯЖЁННОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ОПЕРАТОРА ЭЙЛЕРА

Е. Ю. Панов[1]

Санкт-Петербургское отделение математического института имени В.А. Стеклова РАН

Пусть $a(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ – соленоидальный вектор в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющий глобальному условию Липшица $|a(x) - a(y)| \leqslant m|x-y|\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (через $|z|$ обозначается евклидова норма конечномерного вектора z). Рассмотрим линеаризованную систему стационарных уравнений Эйлера

$$u + h\sum_{j=1}^{n} a_j(x)u_{x_j} + \nabla p = v, \quad \operatorname{div} u(x) = 0. \tag{1}$$

Здесь $h \in \mathbb{R}$, $v = v(x) \in H$, где H — замкнутое подпространство в вещественном гильбертовом пространстве $X = L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, состоящее из соленоидальных векторных полей. Рассмотрим неограниченный линейный оператор A_0 в H, задаваемый равенством $A_0 u = Pv$, где $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \cap H = D(A_0)$, $v = v(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(x)u_{x_j}(x)$, а $P : X \to H$ – ортогональный проектор пространства $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ на подпространство H. Если $u_1 = (u_1^k)_{k=1}^n$, $u_2 = (u_2^k)_{k=1}^n \in D(A_0)$, то

$$(A_0u_1, u_2) + (u_1, A_0u_2) = (Pv_1, u_2) + (u_1, Pv_2) =$$

$$= (v_1, u_2) + (u_1, v_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^{n} a_j(x)((u_1^k)_{x_j}u_2^k + u_1^k(u_2^k)_{x_j})(x)dx = \\ = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \sum_{j,k=1}^{n} a_j(x)(u_1^k u_2^k)_{x_j}dx = 0$$

ввиду условия соленоидальности поля $a(x)$. Таким образом, оператор A_0 кососимметричен. Пусть A — замыкание оператора A_0, A^* — оператор, сопряжённый к A. Ввиду кососимметричности, справедливо включение $-A \subset A^*$.

[1] e-mail: evpanov@pdmi.ras.ru

Определение 1. Вектор $u = (u^1(x), \ldots, u^n(x)) \in H$ называется сильным решением уравнения (1), если $u \in D(A)$ и выполнено равенство $u + hAu(x) = v$. Вектор $u \in H$ называется обобщённым решением уравнения (1), если $u \in D(A^*)$ и $u - hA^*u(x) = v$.

Заметим, что давление $p = p(x)$ не входит в определение решений, но может быть восстановлено из условия соленоидальности поля Au. Нетрудно проверить, что $\nabla p = Tu$, где T — ограниченный линейный оператор на пространстве X, задаваемый равенством

$$\mathcal{F}(Tu)^l(\xi) = -\sum_{j=1}^{n} \mathcal{F}\left(\sum_{k=1}^{n} (a_j)_{x_k} u^k\right)(\xi)\, \frac{\xi_l \xi_j}{|\xi|^2},$$

где $\mathcal{F} : X \to X$ — преобразование Фурье. Поскольку обобщенные производные $(a_j)_{x_k}(x)$ вектора $a(x)$ ограничены (ввиду его липшицевости), а также ограничены и функции $\xi_l\xi_j/|\xi|^2$, то оператор T ограничен.

Рассмотрим оператор B на X, являющийся замыканием оператора

$$B_0 u = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) u_{x_j}(x), \quad u = u(x) \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Оператор B является генератором полугруппы $T_t u(x) = u(y(t,x))$, где $(0, y(t,x))$ точка на интегральной кривой $(s, y(s))$ характеристической системы $\dot{y} = a(y)$, проходящей через (t, x). В силу условия соленоидальности поля $a(y)$, поток $x \to y(t,x)$ сохраняет меру Лебега и операторы T_t, $t \in \mathbb{R}$, образуют группу ортогональных операторов. По теореме Стоуна оператор B кососопряжён: $-B = B^*$. Сужение оператора $\tilde{A} = B + T$ на инвариантное подпространство H совпадает с оператором A. Так как оператор $\tilde{A}$ является ограниченным возмущением кососопряженного оператора B, то достаточно малый интервал $(-h_0, h_0)$ лежит в резольвентном множестве оператора $\tilde{A}$. Ключевым свойством является инвариантность пространства H для резольвенты $(E + h\tilde{A})^{-1}$ при $|h| < \delta$, где $\delta \in (0, h_0)$ достаточно мало. Так как оператор $A = \tilde{A}|_H$ кососимметричен, из этого свойства вытекает кососопряжённость оператора A. В частности, справедлива следующая

Теорема 1. *При любом $h \in \mathbb{R}$, $v = v(x) \in H$ существует единственное сильное решение системы* (1).

Заметим также, что из равенства $-A = A^*$ следует совпадение классов сильных и обобщённых решений.