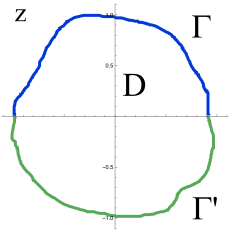
Приближенно-аналитическое решение задачи Коши для гармонической функции в областях с угловыми точками

П.Н. Иваньшин

Физико-математический факультет КНИТУ-КАИ

Задача Коши для гармонической функции в односвязной области



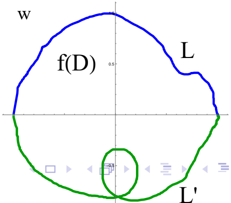
Необходимо найти гармоническую в D и непрерывную и непрерывно дифференцируемую до граничной кривой Γ функцию $h(x, y)$ со свойствами

$$h((s), y(s))|_\Gamma = \phi(s), \qquad (1)$$

$$\frac{\partial h(x, y)}{\partial \overrightarrow{n}}|_\Gamma = \psi(s), \; s \in [0, l],$$

где $\overrightarrow{n}$ — внешняя нормаль к Γ.

$w = f(z)$, $\mathrm{Re}[f(z)] = h(x, y)$,
$f(z(s))|_\Gamma = \phi(s) + \mathrm{i}\chi(s)$, $s \in [0, l]$.
Обозначим
$f(z(s))|_{\Gamma'} = \tilde{u}(s) + \mathrm{i}\tilde{v}(s)$, $s \in [l, T]$.



Согласно [1], [2], необходимое и достаточное условие, чтобы $f(z(s))$, $s \in [0, T]$, были граничными значениями голоморфной в D функции представляет собой отношение $f(z(s)) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_0^T \frac{f(z(t))z'(t)}{z(t)-z(s)} dt, \quad s \in [0, T]..$

Тогда

$$u(s) + \mathrm{i}v(s) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_0^l \frac{(u(t) + \mathrm{i}v(t))z'(t)}{z(t) - z(s)} dt + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_l^T \frac{(\tilde{u}(t) + \mathrm{i}\tilde{v}(t))z'(t)}{z(t) - z(s)} dt, s \in [0, l], \tag{2}$$

$$\tilde{u}(s) + \mathrm{i}\tilde{v}(s) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_0^l \frac{(u(t) + \mathrm{i}v(t))z'(t)}{z(t) - z(s)} dt + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int\limits_l^T \frac{(\tilde{u}(t) + \mathrm{i}\tilde{v}(t))z'(t)}{z(t) - z(s)} dt, s \in [l, T]. \tag{3}$$

Решим сингулярное уравнение (3) затем проверим справедливость (2). На единичном круге $u(\theta) + \mathrm{i}v(\theta) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})$, $\theta \in [0, \pi]$, $\tilde{u}(\theta) + \mathrm{i}\tilde{v}(\theta) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}})$, $\theta \in [\pi, 2\pi]$

$$\tilde{u}(\theta) + \mathrm{i}\tilde{v}(\theta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{u(\tau) + \mathrm{i}v(\tau)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int\limits_\pi^{2\pi} \frac{\tilde{u}(\tau) + \mathrm{i}\tilde{v}(\tau)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} d\tau, \theta \in [\pi, 2\pi], \tag{4}$$

$$u(\theta) + \mathrm{i}v(\theta) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{u(\tau) + \mathrm{i}v(\tau)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} d\tau + \frac{1}{\pi} \int\limits_\pi^{2\pi} \frac{\tilde{u}(\tau) + \mathrm{i}\tilde{v}(\tau)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau} d\tau, \ \theta \in [0, \pi]. \tag{5}$$

Теорема 1.1. *Пусть D — односвязная область с гладкой границей $\Gamma \cup \Gamma'$, где $\Gamma = \{z(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s), s \in S\}$, s — натуральный параметр Γ, $\Gamma' = \{z(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s), s \in S'\}$. Пусть данные, определяемые формулой (1) задачи Коши, заданы в точках Γ. Пусть $\phi(s)$, $s \in S$, класса Гельдера и $\psi(s)$, $s \in S$, непрерывны. Тогда эта задача Коши разрешима, если и только если известная функция $u(s) + \mathrm{i}v(s)$, $s \in S$, удовлетворяет соотношению*

$$u(s) + \mathrm{i}v(s) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_0^l \frac{(u(t) + \mathrm{i}v(t))\, z'(t)}{z(t) - z(s)} dt + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_l^T \frac{(\tilde{u}(t) + \mathrm{i}\tilde{v}(t)) z'(t)}{z(t) - z(s)} dt, \;\; s \in [0, l],$$

где $\tilde{u}(s) + \mathrm{i}\tilde{v}(s)$, $s \in [l, T]$, — решение сингулярного интегрального уравнения

$$\tilde{u}(s) + \mathrm{i}\tilde{v}(s) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_l^T \frac{(\tilde{u}(t) + \mathrm{i}\tilde{v}(t)) z'(t)}{z(t) - z(s)} dt + \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_0^l \frac{(u(t) + \mathrm{i}v(t))\, z'(t)}{z(t) - z(s)} dt, \; s \in [l, T].$$

Решение разрешимой задачи Коши имеет вид

$$h(x, y) = \mathrm{Re} \left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_0^l \frac{(u(t) + \mathrm{i}v(t))\, z'(t)}{z(t) - x - \mathrm{i}y} dt + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_l^T \frac{(\tilde{u}(t) + \mathrm{i}\tilde{v}(t)) z'(t)}{z(t) - x - \mathrm{i}y} dt \right].$$

Приближенное вычисление сингулярного интеграла Коши главного значения по верхней единичной полуокружности

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_0^\pi \frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} d\theta}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_k}}$$

в промежуточном узле $t_k = \pi k/N - \pi/(2N)$, $k = 1, \ldots, N$, можно выполнить, применяя равномерное разбиение полуокружности с помощью следующего приближения имеет вид:

$$\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \int_0^\pi \frac{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} d\theta}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t_k}} \approx \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \sum_{j=1, j\neq k}^{N} f\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi}{2N}\right) \log \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(2(jk)+1)/(2N)} - 1}{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}(2(jk-1)+1)/(2N)} - 1} +$$

$$+\frac{1}{\pi \mathrm{i}} f\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi}{2N}\right) \log \frac{\mathrm{e}^{\pi \mathrm{i}/(2N)} - 1}{\mathrm{e}^{-\pi \mathrm{i}/(2N)} - 1} = \frac{1}{\pi \mathrm{i}} \sum_{j=1}^{k-1} f\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi}{2N}\right) \left[\frac{\pi \mathrm{i}}{2N} + \right.$$

$$\left. + \log \frac{\sin(\pi(2(kj) - 1)/(4N))}{\sin(\pi(2(kj+1) - 1)/(4N))}\right] + f\left(\frac{\pi k}{N} - \frac{\pi}{2N}\right) \frac{1}{2N} +$$

$$+\frac{1}{\pi \mathrm{i}} \sum_{j=k+1}^{N} f\left(\frac{\pi j}{N} - \frac{\pi}{2N}\right) \left[\frac{\pi \mathrm{i}}{2N} + \log \frac{\sin(\pi(2(jk) + 1)/(4N))}{\sin(\pi(2(jk-1) + 1)/(4N))}\right].$$

Таким образом, мы можем заменить любое из сингулярных интегральных уравнений (4) или (5) линейной системой относительно значений неизвестных функций в N промежуточных узлах с соответствующей матрицей $N \times N$. Исследуем разрешимость этой конечной системы при достаточно больших N. Пусть N стремится к бесконечности. Конечная система стремится к бесконечной с матрицей $I - \frac{1}{\pi \mathrm{i}} M$, $M = [a_{kj}]_{k,j}^{\infty}$, где $a_{kj} = -\log(1 + 2/(2k - 2j - 1))$, если $j < k$, $a_{kj} = \log(1 + 2/(2j - 2k - 1))$, если $j > k$, $a_{kk} = 0$, I — бесконечная единичная матрица. L_2-норму этой матрицы можно сравнить с нормой аналога матрицы Гильберта [3].

Пример 1.

Пусть Γ — верхняя половина единичной окружности $(\cos(t), \sin(t))$, $t \in [0, \pi]$. Рассмотрим кривую $(\cos(t), \sin(t) - \frac{1}{4}\sin(4t))$ для $t \in [0, \pi]$ как L. Начальные данные для соответствующей задачи Коши имеют вид $\phi(t) = \cos(t)$, $\psi(t) = \cos(t) - \cos(4t)$. Пусть Γ' — нижняя половина единичного круга. Здесь нам не нужно дополнительное конформное отображение $z = F(\zeta)$ единичного круга, поскольку D — это сам единичный круг, а Γ и Γ' — соответствующие полуокружности.

Решение уравнения (4) позволяет восстановить кривую L'. Решение уравнения (5) позволяет восстановить кривую L''. Заметим, что решение L'' уравнения (5) не совпадает с начальной частью граничной кривой L. На рис.1.1 показана область D с ее граничными частями (Γ, Γ'), а также L как образ Γ и кривые L' и L'' как решения уравнений (4) и (5).

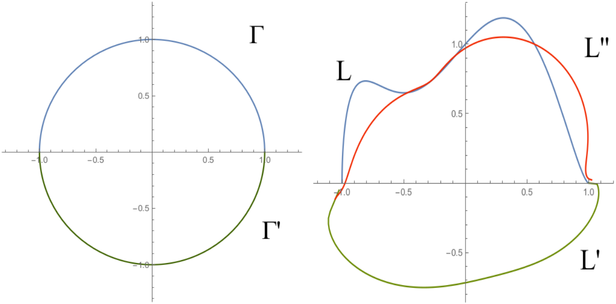
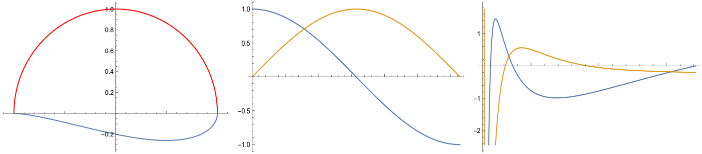


Рис.: Аппроксимация замкнутого контура. Синие линии — это Γ и L. Зелеными линиями отмечены кривая Γ' и соответствующая кривая L', найденная из (4). Красная линия — кривая L'', восстановленная из соотношения (5).

Пример 2. Рассмотрим функцию $\cos(t) + \mathrm{i}(\sin(t))$, заданную на полуокружности $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, и продолжим ее до кривой $(\cos t, 0.2\sin(t) + 0.1\sin(2t))$, $t \in [\pi, 2\pi]$.



Приближенное решение одного интегрального уравнения Фредгольма второго рода

Рассмотрим сначала решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$X(t) = \int\limits_0^{2\pi} G(\tau, t) X(\tau) d\tau + Y(t). \tag{6}$$

Здесь $X(t)$ — неизвестная функция, $G(\tau, t)$ — 2π-периодическая функция по обеим переменным, $Y(t)$ — 2π-периодическая функция по t. Соответственно, решение тоже 2π-периодично, то есть, представимо в виде ряда Фурье. Заметим, что интегральное уравнение представленного вида появляется, например, при решении задачи Дирихле для плоской области методом потенциалов [4].

Лемма

Пусть существуют такие числа $j, p > 1$ *и константа* $U > 0$*, что* $|\frac{\partial^{j+p} G(\tau,t)}{\partial t^j \partial \tau^p}| \leq U$*, и функция* $Y(t)$ *обладает ограниченной второй производной:* $|Y''(t)| < T$*. Тогда приближенное решение однозначно разрешимого интегрального уравнения Фредгольма второго рода (6), может быть сведено к решению конечной линейной системы с ошибкой, которую можно оценить как* $O(1/N^2)$*. Здесь* N *— порядок конечной системы.*

Пусть $z(t)=\sum\limits_{k=-m}^{n} c_k \mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$, $t\in[0,2\pi]$, — уравнение гладкой границы односвязной области D, $0\in D$. С возрастанием t область D остается слева. Пусть $\zeta(z)$ — аналитическая функция, отображающая область D на единичный круг, $\zeta(0)=0$. Рассмотрим аналитическую функцию $\ln(\zeta(z)/z)$, определенную в области D.

$\ln\frac{\zeta(z)}{z}$ — аналитическая функция в D в том и только том случае [1], когда

$$\ln\frac{1}{|z(t)|}+\mathrm{i}(\theta(t)-\arg z(t))=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_0^{2\pi}\frac{\ln\frac{1}{|z(\tau)|}+\mathrm{i}(\theta(\tau)-\arg z(\tau))}{z(\tau)-z(t)}z'(\tau)d\tau, \tag{7}$$

где $\theta(t)$ — зависимость полярного угла θ на границе единичного круга от исходного параметра t контура L — границы D.

Для мнимой части уравнения (7), обозначая $q(t) = \theta(t) - \arg z(t)$, получим уравнение Фредгольма второго рода относительно $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} q(\tau)\frac{\partial(\arg(z(\tau) - z(t)))}{\partial\tau}d\tau + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|z(\tau)|\frac{\partial[\ln|z(\tau) - z(t)|]}{\partial\tau}d\tau. \qquad (8)$$

Здесь свободный член интегрального уравнения представляет собой интеграл в смысле главного значения по Коши.

Соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение [6], если зафиксировать, например, $\int_0^{2\pi} q(t)dt = 0$, так как по теореме Римана, существует единственное конформное отображение однолистной области D на единичный круг с соответствием $f(0) = 0$ и, например, условием $\arg(f'(0)) = 0$. Решив уравнение (8) согласно лемме 1 при помощи решения усеченной системы уравнений, получим $q(t)$.
Найти функцию $q(t)$ можно и другим способом. Если взять производные по t от обеих частей уравнения (8) и воспользоваться интегрированием по частям, мы получим уравнение, имеющее единственное решение:

$$q'(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} q'(\tau)(\arg(z(\tau) - z(t)))'_t d\tau -$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (\ln|z(\tau)|)'(\ln|z(\tau) - z(t)|)'_t d\tau. \qquad (9)$$

Следовательно, мы предполагаем, что $z(t) \in C^1[0, 2\pi]$.

Отображение области на единичный круг при помощи решения интегрального уравнения было предложено в [7]. Однако, автор не указал эффективного способа решения такого уравнения. К.И. Бабенко решал эти уравнения методом коллокации [8]. Кроме того, в данной работе уравнение решается относительно производной, а не относительно самой функции, перепараметризующей границу области. Далее, здесь исследованы случаи многосвязных и узких областей, а также областей с угловыми точками. Итерационный метод Вегмана построения интерполяционного полинома [10] представляет собой также поточечное приближение отображения единичного круга на заданную область. Тот же автор предложил итерационное решение интегрального уравнения вспомогательной краевой задачи [9]. Данный метод также плохо справляется с областями с угловыми точками, поскольку оператор, используемый в итерационной процедуре, не является сжатием [11].

Предположим, что граница D_z содержит точку острого угла $z_0(t_0)$ с внутренним углом $\lambda\pi$, $\lambda < 1$. Первым шагом в нашем построении приближенной функции отображения единичного круга на D_z является приближенное решение интегрального уравнения (8). D.M. Hough и N. Papamichael строили отображения на многоугольные области, склеивая сплайны и сингулярные функции [12]. Приближение $\tilde{\theta}(t)$ к $\theta_0(t)$ не является монотонным в окрестности значения параметра t_0, поэтому нормали к границе D_z перекрываются в окрестности угловой точки, как это показано по рис. 1.16, а. Для сохранения монотонности функции разрежем складку (см. рис. 1.16, б) следующим образом.

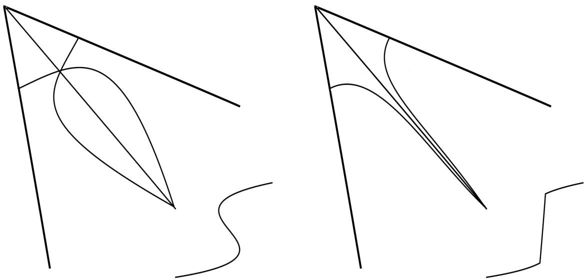


Рис.: Пересечение нормалей в окрестности угловой точки

Заменим функцию $\tilde{\theta}(t)$ сплайном $\phi(t)$ на отрезке $[t_0 - \epsilon_1, t_0 + \epsilon_2]$ так, что $\phi'(t) > 0$, $t \in [t_0 - \epsilon_1, t_0) \cup (t_0, t_0 + \epsilon_2]$, $\phi'(t_0) = 0$ и непрерывная функция

$$\breve{\theta}(t) = \begin{cases} \tilde{\theta}(t), & t \in [0, 2\pi] \setminus [t_0 - \epsilon_1, t_0 + \epsilon_2], \\ \phi(t), & t \in [t_0 - \epsilon_1, t_0 + \epsilon_2], \end{cases}$$

монотонно возрастает на $[0, 2\pi]$ (см. рис. 1.17).

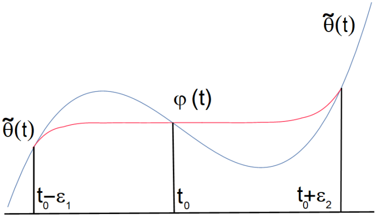


Рис.: Сплайн в окрестности угловой точки

Пример 3. Единичный круг с двумя ортогональными касательными. Левая часть рис. 1.18 результат первого шага, кубического сплайна. Второй шаг также с кубическим сплайном правая часть рис. 1.18, красными линиями показана граница целевой области.

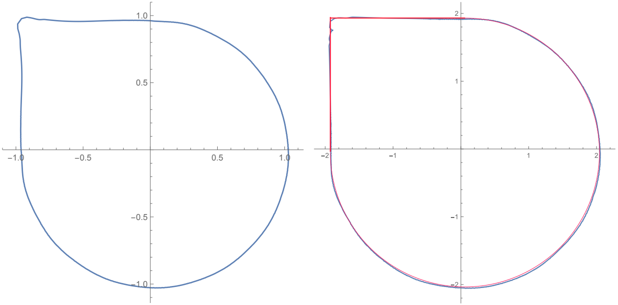
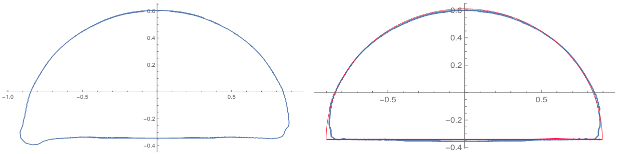
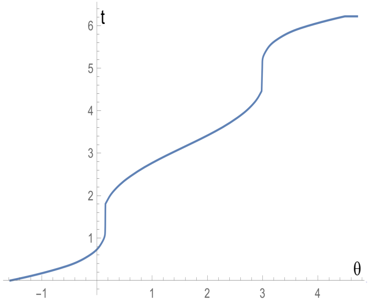


Рис.: Область с одним углом

Пример 4. Полукруг радиуса 1. Левая часть рис. 1.19 результат первого шага, кубического сплайна. Второй шаг с линейным сплайном — правая часть рис. 1.19, красными линиями показана граница целевой области. Нижнее изображение — перепараметризация угла.





Пример 5. Фигура, ограниченная кривой $e^{it} + \frac{1}{4}e^{-i2t} + \frac{1}{8}ie^{-i3t}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Здесь видно, что предлагаемым подходом можно аппроксимировать не только углы, но и области с относительно тонкими граничными элементами. Первые две части рис. 1.20 представляют собой результаты первого шага, кубического сплайна и линии уровня второго шага, линейного сплайна; красные линии показывают границу области. Нижнее изображение 1.20 перепараметризация угла.

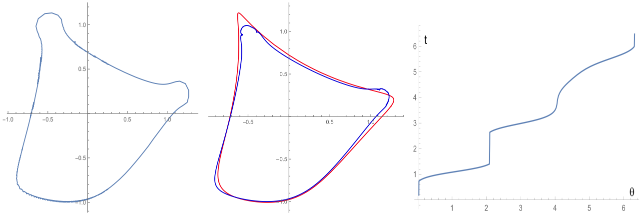


Рис.: Приближения и перепараметризация угла

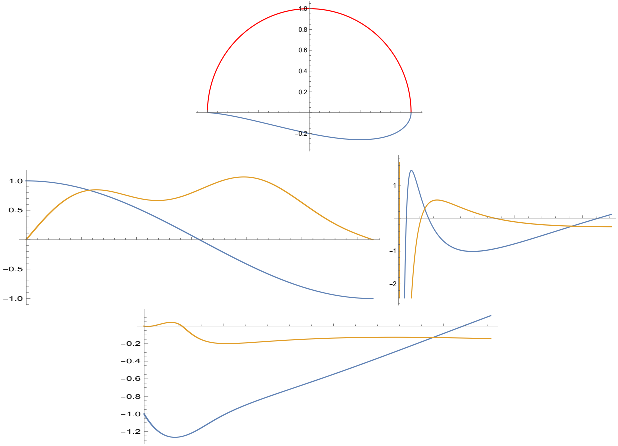
Интеграл $\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_0^\pi \frac{u(\tau)+\mathrm{i}v(\tau)}{z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})-z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} z'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})d\tau$ разбивается на два слагаемых $\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_0^\pi \frac{u(\tau)}{z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})-z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} z'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})d\tau$ и $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \frac{v(\tau)}{z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})-z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})} z'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})d\tau$. Каждый из этих элементов снова допускает представление

$\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_0^\pi u(\tau)\mathrm{Re}[d\ln(z_\tau(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})-z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))] + \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int\limits_0^\pi u(\tau)\mathrm{Im}[d\ln(z_\tau(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})-z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))]$

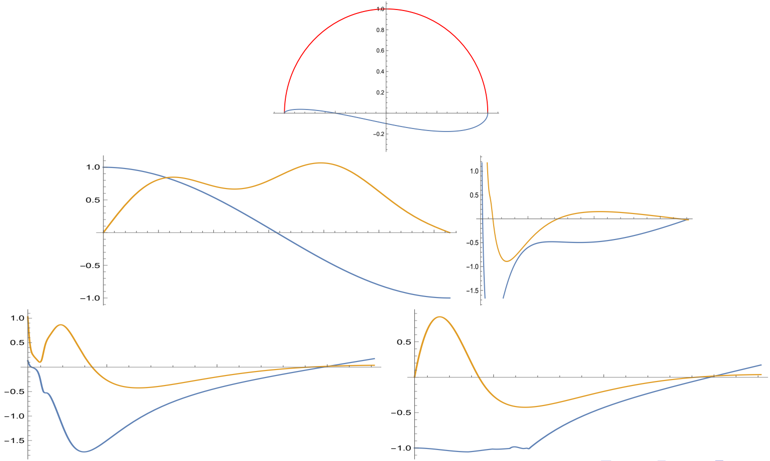
и $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi v(\tau)\mathrm{Re}[d\ln(z_\tau(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})-z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))] + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi v(\tau)\mathrm{Im}[d\ln(z_\tau(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})-z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))]$.

Слагаемое с действительной частью $\mathrm{Re}[d\ln(z_\tau(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})-z(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}))]$ для неизвестных функций $u(\tau)$ и $v(\tau)$ претерпевает модификацию, отвечающую абсолютному значению γ и гармонически сопряженную скачку мнимой части $\mathrm{Arg}[\gamma(t)]$. Кривизна приближенной кривой ограничена снизу. Действительно, рассмотрим формулу $\frac{\det(\nu',\nu'')}{\|\nu'\|^3}$. Тогда, поскольку разбиение $[0,2\pi]$ конечно, знаменатель не меньше $K\delta[0,2\pi]$, здесь $\delta[0,2\pi]$ равно минимальный интервал разбиения. Знаменатель кривизны ограничен сверху, поскольку $[0,2\pi]$ — компактное множество.

Пример 6. Рассмотрим функцию
$\cos(t) + \mathrm{i}(\sin(t) + 0.15\sin(3t) + 0.2\sin(4t))$, заданную на полуокружности $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, и продолжим ее до кривой $(\cos t, 0.2\sin(t) + 0.1\sin(2t))$, $t \in [\pi, 2\pi]$.



Пример 7. Рассмотрим функцию $\cos(t) + \mathrm{i}(\sin(t) + 0.15\sin(3t) + 0.2\sin(4t))$, заданную на полуокружности $(\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$, и продолжим ее до кривой $(\cos t, \sin(t) + 0.15\sin(3t) + 0.2\sin(4t))$, $t \in [\pi, 2\pi]$.



- F.D. Gakhov, Boundary value problems., Pergamon Press, Oxford, 1966.
- N. I. Muskhelishvili, Singular Integral Equations, Springer. 1958
- I. Schur, Bemerkungen zur Theorie der Beschraenkten Bilinearformen mit unendlich vielen Veraenderlichen, J. Reine Angew. Math. 140 (1911) 1–28.
- Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, М.: Издательство иностранной литературы, 1960.
- Ф.Д. Гахов, Краевые задачи (Москва, ФИЗМАТЛИТ, 1977).
- L.A. Lyusternik, V.I. Sobolev Elementy funkcional'nogo analiza. (Russian) [The elements of functional analysis.] Gosudarstv. Izdat. Tehn.-Teor. Lit., Moscow-Leningrad, 1951. 360 pp.

- G.T. Symm, An integral equation method in conformal mapping // Numer. Math, 1966, 9, 250-258.
- К. И. Бабенко, Несколько замечаний о дискретизации эллиптических задач, Докл. АН СССР, 221:1 (1975), 11–14.
- R. Wegman, A.H.M. Murid, M.M.S. Nasser, The Riemann-Hilbert problem and the generalized Neumann kernel // J. Comput. Appl. Math., 2005, 182, p. 388-415.
- R. Wegman, An iterative methods for conformal mapping// J. Comput. Appl. Math., 1986, 14, 7-18.
- Eun-Jee Song, A study on stabilization for numerical conformal mapping, J. Appl. Math. & Computing Vol. 20(2006), No. 1 - 2, 611–621

- D.M. Hough, N. Papamichael An integral equation method for the numerical conformal mapping of interior, exterior and doubly-connected domains // Numerische Math. 1983, 14, p. 287-307.
- P.N. Ivanshin, E.A. Shirokova, The Approximate Conformal Mapping of a Disk onto Domain with an Acute Angle, Int. J. Appl. Comput. Math (2023) 9:54, https://doi.org/10.1007/s40819-023-01529-z
- P. N. Ivanshin, Spline-interpolation solution of 3D von Neumann problem// Lobachevskii J. of Math. 2012, Vol. 33, Issue 4, pp 336–340
- P. N. Ivanshin, Spline-interpolation solution of the heat equation // Lobachevskii J. of Math. - 2011, Vol. 32, Issue 4, pp 395–403
- P.N. Ivanshin , Spline-interpolation solution of the linear hyperbolic eguation // Lobachevskii J. of Math. - 2013. - Vol. 34, No 3. - P. 282-290.

- P. N. Ivan'shin, Methods of Constructing Quasisolutions in Inverse Boundary-Value Aerohydrodynamics Problems //Russian Aeronautics (Iz.VUZ) - 2014, Vol. 57, No. 3, - P. 253-259.
- P. Ivanshin, Conditional Optimization and One Inverse Boundary Value Problem // Mathematical Problems in Engineering - 2015, Vol. 2015 - P. 1- 9.
- P. N. Ivanshin, ''Quasisolution of the Inverse 3D Aerohydrodynamics Problem'', Applied Mechanics and Materials, Vol. 565, pp. 61-66, 2014
- P.N. Ivanshin, L.R. Sekaeva, E.A. Shirokova, On the approximate solutions of the second basic elasticity theory problem. Lobachevskii Journal of Mathematics, v.31, no 4, pp.376-389.
- P.N. Ivanshin, E.A. Shirokova, Spline-interpolation solution of 3D Dirichlet problem for a certain class of solids // IMA Journal of Applied Mathematics - 2013. - V. 78, No 6 - P. 1109-1129.

- E.A. Shirokova, On approximate conformal mapping of the unit disk on an simply connected domain. Russia Mathematics (Iz VUZ), 2014, V.58, N.3, pp. 47–56.
- E.A. Shirokova, D.F. Abzalilov, Methods of approximate conformal mapping of the canonical domain on simply connected and doubly connected domains, Materials Intern. Conf. in algebra, analysis and geometry. – Kazan: Kazan. Univ; AN RT Press, 2016.77–78. (in Russian)
- E. A. Shirokova, P. N. Ivanshin, *Spline-Interpolation Solution of One Elasticity Theory Problem.* Bentham Science E-books, (2011).
- E.A. Shirokova, P. N. Ivanshin, Approximate Conformal Mappings and Elasticity Theory, Journal of Complex Analysis, vol. 2016, Article ID 4367205, 8 pages, 2016

- П. Н. Иваньшин, Сплайн-интерполяционное решение задач теории упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки, 2015, том 157, книга 4, страницы 24–41
- E. A. Shirokova. On the approximate conformal mapping of the unit disk on a simply connected domain. Russian Math., V.58 (2014), N.3, 47–56.
- E. A. Shirokova, P. N. Ivanshin. Approximate Conformal Mappings and Elasticity Theory. J. of Compl. Analysis, V.2016.
- Тайков Л. В. Один круг экстремальных задач для тригонометрических полиномов, УМН, 20:3(123) (1965), 205–211
- Тайков Л. В. О наилучшем приближении ядер Дирихле, Матем. заметки, 53:6 (1993), 116–121