РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ В ОБЛАСТИ ОГРАНИЧЕННОЙ КРИВОЙ С УГЛОВЫМИ ТОЧКАМИ

П. Н. Иваньшин[1]

КНИТУ-КАИ

Мы представляем способ построения приближенного конформного отображения единичного круга на область с угловыми точками на ее границе [1] и его модификацию для решения задачи Коши.

Для решения задачи об отображении единичного круга на область методом перепараметризации границы рассмотрим уравнение Фредгольма второго рода относительно $q(t)$:

$$q(t) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} q(\tau)\,\frac{\partial(\arg(z(\tau)-z(t)))}{\partial\tau}\,d\tau + \\ + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln|z(\tau)|\,\frac{\partial[\ln|z(\tau)-z(t)|]}{\partial\tau}\,d\tau. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Для любой области D с границей — простой гладкой замкнутой кривой L, заданной полиномом Фурье, можно с любой точностью построить функцию, отображающую D на единичный круг при помощи решения интегрального уравнения, сведенного к конечной системе линейных уравнений.*

Стандартный метод итераций решения интегрального уравнения [2] для областей, ограниченных кривыми с угловыми точками, не работает [3].

В окрестности угловой точки функция θ немонотонна. Необходима локальная перепараметризация как $\theta(t)$, так и вещественной части решения в виде гармонически сопряженной функции.

Рассмотрим теперь задачу Коши для области с угловыми точками на границе. Основной вопрос здесь — построить решение в слу-

[1] e-mail: pivanshi@yandex.ru

чае соединения двух кривых в угловой точке, поскольку в остальных случаях подход [1] допускает модификацию.

Пусть дана замкнутая кривая $\gamma = \Gamma \bigcup \Gamma'$. Пусть даны значения функции $f = u + \mathrm{i}v$ на Γ. Необходимо продолжить функцию f внутрь области, ограниченной γ.

Восстанавливаем значения аналитической функции $u + \mathrm{i}v$ в точках кривой Γ' согласно следующему утверждению:

Теорема 2. *Пусть D — односвязная область с гладкой границей $\Gamma \cup \Gamma'$, где $\Gamma = \{z(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s), s \in S\}$, s — натуральный параметр Γ, $\Gamma' = \{z(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s), s \in S'\}$. Пусть данные, определяемые формулой (1) задачи Коши, заданы в точках Γ. Пусть $\phi(s)$, $s \in S$, класса Гельдера и $\psi(s)$, $s \in S$, непрерывны. Тогда эта задача Коши разрешима, если и только если известная функция $\phi(s) + \mathrm{i}\int\limits_0^s \psi(t)dt$, $s \in S$, удовлетворяет соотношению*

$$\phi(s) + \mathrm{i}\int\limits_S \psi(t)dt = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int\limits_0^l \frac{\left(\phi(t) + \mathrm{i}\int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau\right)z'(t)}{z(t) - z(s)}dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int\limits_l^T \frac{(\tilde{\phi}(t) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(t))z'(t)}{z(t) - z(s)}dt, \ s \in S,$$

где $\tilde{\phi}(s) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(s)$, $s \in [l, T]$, — решение сингулярного интегрального уравнения

$$\tilde{\phi}(s) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(s) = \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int\limits_{S'} \frac{(\tilde{\phi}(\tau) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(\tau))r'(\tau)}{r(\tau) - r(s)}dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\int\limits_S \frac{\left(\phi(t) + \mathrm{i}\int\limits_0^t \psi(\tau)d\tau\right)z'(t)}{z(t) - z(s)}dt, \ s \in S'.$$

Решение разрешимой задачи Коши имеет вид

$$h(x,y) = \operatorname{Re}\left[\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_0^l \frac{\left(\phi(t) + \mathrm{i}\int\limits_0^l \psi(\tau)d\tau\right)z'(t)}{z(t)-x-\mathrm{i}y}\,dt + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_l^T \frac{(\tilde{\phi}(t) + \mathrm{i}\tilde{\chi}(t))z'(t)}{z(t)-x-\mathrm{i}y}\,dt\right].$$

Слагаемое с действительной частью $dz'_\tau(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\tau})$ для неизвестных функций $u(\tau)$ и $v(\tau)$ имеет дело с кривой ν, отвечающей за абсолютное значение γ. Кривизна этой кривой ограничена снизу. Действительно, рассмотрим формулу $\frac{\det(\nu', \nu'')}{\|\nu'\|^3}$. Тогда, поскольку разбиение $[0, 2\pi]$ конечно, знаменатель не меньше $K\delta$, здесь δ — минимальный интервал разбиения. Знаменатель кривизны ограничен сверху, поскольку $[0, 2\pi]$ — компактное множество. Следовательно, опять требуется модификация уже уравнений системы в окрестности угловой точки.

Список литературы

1. P.N. Ivanshin, E.A. Shirokova, *The Approximate Conformal Mapping of a Disk onto Domain with an Acute Angle,* // Int. J. Appl. Comput. Math., Vol. 6, No. 54, URL: https://doi.org/10.1007/s40819-023-01529-z (2023).
2. P.K. Kythe, *Handbook of Conformal Mappings and Applications* (1st ed.). Chapman and Hall/CRC.
URL: https://doi.org/10.1201/9781315180236 (2019).
3. Eun-Jee Song, *A study on stabilization for numerical conformal mapping,* // J. Appl. Math. & Computing, Vol. 20, No. 1–2, Pp. 611–621, (2006).