Задачи к курсу Вьюгина:
“Уравнение Маркова и математика вокруг него”
Дубна 2025

Тройками Маркова называются целочисленные решения (a, b, c) уравнения Маркова

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz, \tag{1}$$

числами Маркова называются все компоненты его решений.

1. Докажите, что ни одно число Маркова не делится ни на 3, ни на 4.

2. Докажите, что среди чисел Маркова присутствуют все числа Фибоначчи с нечётными номерами.

3. Докажите, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = kxyz$$

имеет целые положительные решения только при $k = 1$ и $k = 3$.

4. Докажите, что у каждого решения (a, b, c) уравнения Маркова координаты a, b, c попарно взаимно просты.

5. Опишите структуру множества натуральных решений уравнения:

$$x^2 + y^2 + z^2 + k_1xy + k_2yz + k_3zx = (3 + k_1 + k_2 + k_3)xyz, \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}.$$

6. Докажите, что для простых p выполнено:
1) при $p \equiv \pm 1 \pmod 5$: $\pi(p) \mid (p - 1)$;
2) при $p \equiv \pm 2 \pmod 5$: $\pi(p) \mid 2(p + 1)$.

7. Пусть $Q \in \mathbb{Z}_p[x, y]$ — многочлен, а

$$P(x, y) = f_n(x)y^n + \ldots + f_1(x)y + f_0(x)$$

неприводимый многочлен векторной степени (m, n), а $t \mid (p-1)$. Докажите, что если $P(x, y) \mid Q(x, y^t)$, то $P(x, 0)^{[\frac{t}{n}]} \mid Q(x, 0)$ ($[\cdot]$ – целая часть).

8. Пусть A и B — 2×2-матрицы с единичным определителем. В этом случае есть три инварианта одновременного сопряжения:

$$x = \mathrm{tr}A, \quad y = \mathrm{tr}B, \quad z = \mathrm{tr}AB.$$

Докажите, что $\mathrm{tr}ABA^{-1}B^{-1} = x^2 + y^2 + z^2 - xyz - 2$. (Указание: воспользуйтесь тем, что $A^2 - xA + E = 0$.)

9. Поверхность Маркова S_D — это тройки (x, y, z), удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 + z^2 - xyz = D$. Преобразование $(A, B) \to (A, AB)$ сохраняет след группового коммутатора, потому что он заменяется на сопряжённый, так же, как и преобразование: $(A, B) \to (B, A)$. Найдите формулу полиномиального автоморфизма поверхности Маркова, соответствующего преобразованию: $(A, B) \to (AB, A)$.

10. Представим себе, что у нас написана квазипериодичная последовательность букв A и B: на местах вида $[n\varphi]$ (φ — золотое сечение) стоят буквы A, а на остальных B. Разрежем последовательность на кусочки A'=AB и B'=A, которые будут идти «в таком же порядке». Так что можно повторять процесс. Для следов это будет последовательным применением отображения из предыдущей задачи. Как ведёт себя след (длинной начальной части) такого произведения?