

Задачи по курсу Д. А. Тимашёва
«Группы отражений и системы корней» (ЛШСМ–2025)
Занятие 2

Сегодня мы доказывали нижеследующую теорему (и почти доказали — осталось немножко). Поскольку доказательство длинное и нетривиальное, мы воспроизведём здесь его схему ещё раз в виде списка задач (часть из которых мы решили на сегодняшнем занятии, а часть решим на следующем занятии) и добавим ещё задачи про свойства групп отражений, которые можно решить, используя идеи из доказательства теоремы.

Теорема:

- (а) Камеры группы отражений в евклидовом пространстве $\mathbb{E}^n$ являются многогранниками Кокстера.
- (б) Любой многогранник Кокстера $P \subseteq \mathbb{E}^n$ является одной из камер группы отражений $G = G_P$, порождённой отражениями относительно стенок многогранника P .
- (в) Группа G действует на множестве своих камер просто транзитивно.

Задачи:

1. Доказать пункт (а) теоремы. (*Указание:* рассмотреть галерею камер с общей $(n - 2)$ -мерной гранью.)
2. Пусть $P \subseteq \mathbb{E}^n$ — произвольный многогранник. Доказать, что многогранники gP по всем $g \in G_P$ покрывают пространство $\mathbb{E}^n$, индукцией по n . Шаг индукции делается в три приёма:
 - (а) У любой точки $p \in P$ существует окрестность U , содержащаяся во множестве

$$M = \bigcup_{g \in G_P} gP.$$

(*Указание:* вопрос сводится к случаю, когда P — конус с вершиной p . Если окрестности U не существует, то можно построить последовательность точек $q_k \in \mathbb{E}^n \setminus M$, $q_k \rightarrow p' \in P$, и прийти к противоречию, применив предположение индукции к сечению многогранника P гиперплоскостью, перпендикулярной прямой $\overline{pp'}$ в точке p' .)

- (б) M открыто.
- (в) M замкнуто.

Далее P — многогранник Кокстера.

3. Пусть $g = r_1 \cdots r_k \in G_P$, где r_i — отражения относительно стенок многогранника P , и $P' = gP$. Доказать:
 - (а) Многогранник $P_i = r_1 \cdots r_i P$ получается из многогранника P_{i-1} отражением относительно общей гиперплоскости.
 - (б) Проведём из точки $p \in \text{int}(P)$ в точку $p' \in \text{int}(P')$ путь по цепочке многогранников $P_0 = P, P_1, \dots, P_k = P'$, не пересекающий граней размерности $\leq n - 2$, и будем его деформировать, не задевая граней размерности $\leq n - 3$. Тогда при деформации могут происходить следующие перестройки цепочки многогранников P_i и элементов $g \in G_P$:

$$(P_0, \dots, P_{i-1}, P_i, P_i, P_{i+2}, \dots, P_k) \rightsquigarrow (P_0, \dots, P_{i-1}, P_{i+2}, \dots, P_k)$$

$$g = r_1 \cdots r_{i-1} r_i r_i r_{i+2} \cdots r_k \rightsquigarrow g' = r_1 \cdots r_{i-1} r_{i+2} \cdots r_k$$

или (переход через $(n - 2)$ -мерную грань)

$$(P_0, \dots, P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, \dots, P_{i+l}, \dots, P_k) \rightsquigarrow (P_0, \dots, P_{i-1}, P'_i, P'_{i+1}, \dots, P_{i+l}, \dots, P_k)$$

$$g = r_1 \cdots r_{i-1} \underbrace{r_i r_{i+1} r_i}_{l} \cdots r_{i+l} \cdots r_k \rightsquigarrow g' = r_1 \cdots r_{i-1} \underbrace{r_{i+1} r_i r_{i+1}}_{2m-l} \cdots r_{i+l} \cdots r_k,$$

где угол между зеркалами отражений r_i и r_{i+1} равен π/m .

- (в) Если внутренности многогранников P и P' пересекаются, то $P = P'$, $g = e$. (Указание: рассмотреть петлю с началом и концом в точке $p \in \text{int}(P) \cap \text{int}(P')$ и стянуть её в p .)
4. (а) Зеркала всех отражений в группе $G = G_P$ имеют вид gH , где $g \in G$, а H — стенка многогранника P .
- (б) Многогранники gP ($g \in G$) являются камерами группы G .
5. Доказать пункт (в) теоремы.
6. (а) Каждый компакт $K \subseteq \mathbb{E}^n$ пересекает лишь конечное число многогранников gP ($g \in G$).
- (б) Группа G дискретна.
7. Определяющие соотношения между порождающими группу G отражениями $r_i = r_{H_i}$ относительно стенок H_i многогранника P имеют вид $r_i^2 = (r_i r_j)^{m_{ij}} = e$, где

$$\angle(H_i, H_j) = \frac{\pi}{m_{ij}}$$

(соотношения второго типа присутствуют только для $m_{ij} < \infty$).

8. Стабилизатор G_p точки $p \in P$ порождается отражениями r_i относительно стенок H_i , проходящих через p .
9. Каждая орбита группы G в пространстве $\mathbb{E}^n$ пересекает многогранник P в единственной точке (т.е. P — фундаментальная область для действия группы G в пространстве $\mathbb{E}^n$).
10. Если дискретная подгруппа $G \subset \text{Isom}(\mathbb{E}^n)$ порождена отражениями r_j относительно гиперплоскостей H_j (не обязательно являющихся стенками какой-то фиксированной камеры), то зеркало любого отражения в G имеют вид gH_j для некоторых j и $g \in G$.