

**Задачи по курсу Д. А. Тимашёва**  
**«Группы отражений и системы корней» (ЛШСМ–2025)**  
**Занятие 3**

Цель — получить следующую классификацию связных схем Кокстера:

| Эллиптические схемы ( $n$ вершин) |  | Параболические схемы ( $n + 1$ вершина) |  |
|-----------------------------------|--|-----------------------------------------|--|
| $A_n$                             |  | $\tilde{A}_n$                           |  |
| $B_n = C_n$                       |  | $\tilde{A}_1 = I_\infty$                |  |
| $D_n$                             |  | $\tilde{B}_n$                           |  |
| $E_n$ ( $n = 6, 7, 8$ )           |  | $\tilde{C}_n$                           |  |
| $F_4$                             |  | $\tilde{D}_n$                           |  |
| $G_2$                             |  | $\tilde{E}_6$                           |  |
| $H_2$                             |  | $\tilde{E}_7$                           |  |
| $H_3$                             |  | $\tilde{E}_8$                           |  |
| $H_4$                             |  | $\tilde{F}_4$                           |  |
| $I_m$                             |  | $\tilde{G}_2$                           |  |

**Задачи:**

- Если тупоугольная система векторов  $\{v_i \mid i \in I\}$  неразложима, то либо векторы  $v_i$  линейно независимы, либо между ними существует единственная (с точностью до пропорциональности) линейная зависимость  $\sum_{i \in I} \lambda_i v_i = 0$ , причём все  $\lambda_i > 0$ . (Указание: переписать линейную зависимость между векторами  $v_i$  в виде  $\sum_{j \in J} \alpha_j v_j = \sum_{k \in I \setminus J} \beta_k v_k$ , где  $\alpha_j > 0$ ,  $\beta_k \geq 0$ , и скалярно перемножить левую и правую части равенства.)
- Пусть схема  $S$  имеет висячую вершину  $i$ , соединённую с единственной вершиной  $j$  ребром кратности  $m_{ij} - 2$ , и  $S' = S \setminus \{i\}$ ,  $S'' = S \setminus \{i, j\}$ . Тогда определитель соответствующей симметрической матрицы  $\Gamma(S)$  вычисляется по формуле

$$\det \Gamma(S) = \det \Gamma(S') - \cos^2 \frac{\pi}{m_{ij}} \cdot \det \Gamma(S'').$$

(Указание: разложить  $\det \Gamma(S)$  по  $i$ -й строке.)

- Все схемы в левом столбце таблицы являются эллиптическими, а в правом — параболическими схемами Кокстера.
- Любая схема  $S$  с  $s \leq 2$  вершинами является схемой Кокстера. Какие многогранники Кокстера соответствуют этим схемам?

5. Всякая связная схема Кокстера  $S$  является деревом, кроме  $S = \tilde{A}_n$ . (*Указание*: рассмотреть сумму единичных внешних нормалей к стенкам многогранника Кокстера, соответствующего минимальному циклу в  $S$ , и вычислить скалярный квадрат этого вектора.)

Далее считаем, что  $S$  — связная схема Кокстера без циклов.

6. Если  $S$  имеет 3 вершины, то это одна из схем  $A_3, B_3, H_3, \tilde{C}_2, \tilde{G}_2$ .

Далее считаем, что  $S$  — имеет  $> 3$  вершин.

7. В  $S$  нет рёбер кратности  $> 3$ , а если есть ребро кратности 3, то  $S = H_4$ .

8. Любая вершина в  $S$  имеет степень  $\leq 4$ , причём вершина степени 4 есть только у схем  $H_4, \tilde{B}_3, \tilde{D}_4$ . (*Степенью* вершины называется суммарная кратность рёбер, из неё выходящих.)

*Особенностью* схемы  $S$  называется кратное ребро или разветвление.

9. Схема  $S$  имеет не более одной особенности, кроме случаев  $S = \tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n$ .

Далее считаем, что  $S$  имеет не более одной особенности.

10. Если  $S$  имеет кратное ребро, то это одна из схем  $B_n, F_4, \tilde{F}_4$ .

11. Если  $S$  имеет разветвление, то это одна из схем  $D_n, E_n, \tilde{E}_n$ .

Единственная связная схема Кокстера без циклов и особенностей — это  $A_n$ . Классификация закончена.