

Задачи к курсу "Divide et impera"

- (1) Покажите, что для всякой выпуклой плоской фигуры найдётся прямая, делящая её на две части одинаковой площади и одинакового периметра. (Непрерывность)
- (2) Покажите, что всякий компакт (всякий многоугольник) на плоскости может быть разделен на шесть равных по площади частей тремя прямыми, проходящими через одну точку. (Непрерывность)
- (3) Не всякая плоская фигура может быть разделена тремя прямолинейными разрезами на семь равных по площади частей. (Угадать)
- (4) Пусть в $A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^n$ – равномощные конечные множества точек общего положения (никакие $n + 1$ не лежат в одной гиперплоскости). (Начните с размерностей 2 и 3.) Покажите, что все точки можно разбить на наборы из n точек, в каждом наборе ровно по одной точке из каждого A_i , так, что выпуклые оболочки этих наборов не пересекаются. (Воспользоваться пройденным)
- (5) Всякие 4 тела в $\mathbb{R}^6$ можно разрезать двумя гиперплоскими разрезами, каждое на 4 равные по объёму части.
- (6) Правдоподобно ли утверждение "В трехмерном пространстве всякий компакт (всякий выпуклый многогранник) может быть разрезан тремя взаимно ортогональными плоскими разрезами на 8 равных по объёму частей"?
- (7) Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – выпуклое тело. Покажите, что найдутся три взаимно ортогональные плоскости, каждые две из которых делят на 4 равные по объёму части.
- (8) Пусть $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция с компактным носителем, не обязательно неотрицательная. Покажите, что существуют две взаимно ортогональные прямые, делящие плоскость на 4 части, такие, что интегралы от f по этим четвертинкам совпадают.
- (9) Покажите, что в каждую замкнутую гладкую кривую без самопересечений на плоскости можно вписать квадрат (= найдётся квадрат, все вершины которого лежат на этой кривой). (Воспользоваться пройденным)