

# Алгебры Ли

курс И.В. Аржанцева

Летняя школа “Современная математика”, Ратмино, 19-30 июля 2025 года

## Задачи к лекции 1

**Задача 1.** Приведите пример двумерной алгебры без ненулевых идемпотентных элементов.

**Задача 2.** Пусть  $U$  и  $V$  — конечномерные векторные пространства. Постройте естественный изоморфизм между пространством линейных отображений из  $U$  в  $V$  и тензорным произведением  $U^* \otimes V$ .

**Задача 3.** Классифицируйте с точностью до изоморфизма произвольные алгебры размерности один и размерности два.

**Задача 4.** Классифицируйте с точностью до изоморфизма алгебры Ли размерности два и размерности три.

**Задача 5.** Вычислите структурные константы алгебры Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

**Задача 6.** Докажите, что не существует ассоциативной алгебры  $A$ , для которой  $L(A)$  это алгебра Ли  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

**Задача 7.** Найдите размерности алгебр Ли  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  и  $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$ .

**Задача 8.** Докажите, что коммутант алгебры Ли  $\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C})$  совпадает с  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ , и алгебра Ли  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  совпадает со своим коммутантом.

**Задача 9.** Докажите, что для любого  $x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  найдутся такие  $y, z \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ , что  $x = [y, z]$ .

**Задача 10.** Докажите, что алгебра Ли  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  проста. Для каких значений  $n$  алгебра Ли  $\mathfrak{so}_n(\mathbb{C})$  проста?

**Задача 11.** Найдите все идеалы в алгебре Ли  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ .

**Задача 12.** Докажите, что алгебра Ли  $\mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$  порождается двумя элементами.

**Задача 13.** Приведите пример конечномерной алгебры Ли над  $\mathbb{C}$ , которая совпадает со своим коммутантом, но не является прямой суммой простых алгебр Ли.

**Задача 14.** Проверьте, что коммутатор  $[D, E]$  двух дифференцирований является дифференцированием. Когда композиция  $D \circ E$  двух дифференцирований является дифференцированием?

**Задача 15.** Вычислите явно коммутатор  $[D, E]$  двух дифференцирований алгебры многочленов, где  $D = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $E = \sum g_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ .

**Задача 16.** Найдите конечномерную алгебру  $\mathcal{A}$ , для которой алгебра Ли дифференцирований  $\text{Der}(\mathcal{A})$  это  $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ .

**Задача 17.** Докажите, что алгебра Ли дифференцирований  $\text{Der}(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$  проста.