

Алгебры Ли

курс И.В. Аржанцева

Летняя школа “Современная математика”, Ратмино, 19-30 июля 2025 года

Задачи к занятию 2

Задача 1. Приведите пример таких конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и коммутативного идеала V в $\mathfrak{g}$, что $\mathfrak{g}$ не разлагается в полупрямую сумму $\mathfrak{h} \ltimes V$ ни для какой подалгебры Ли $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$. Докажите, что в этой ситуации коразмерность V в $\mathfrak{g}$ не меньше 2.

Задача 2. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли на $\mathbb{C}$. Докажите, что радикал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ равен нулю тогда и только тогда, когда $\mathfrak{g}$ есть прямая сумма простых идеалов.

Задача 3. Докажите, что любой ненулевой идеал нильпотентной алгебры Ли имеет ненулевое пересечение с центром этой алгебры.

Задача 4. Приведите примеры разрешимых алгебр Ли с нулевым центром. Может ли центр разрешимой алгебры Ли выделяться прямым слагаемыми? Может ли это случаться для нильпотентной алгебры Ли?

Задача 5. Проверьте, что центр алгебры Ли

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ 0 & a & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & a & 0 & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ; a, a_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

тривиален, но пересечение централизаторов любых двух элементов из $\mathfrak{g}$ ненулевое.

Задача 6. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \oplus \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$. Рассмотрим идеал $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C}) \oplus \{0\}$ и подалгебру $\mathfrak{g}_1 = \{(x, x), x \in \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})\}$ в $\mathfrak{g}$. Покажите, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ является полупрямой суммой $\mathfrak{g}_1 \ltimes \mathfrak{g}_0$.

Задача 7. Приведите примеры нескольких попарно неизоморфных филиформных алгебр Ли одинаковой размерности.

Задача 8. Найдите в алгебре Ли $W_1 := \text{Der}(\mathbb{C}[x])$ подалгебру Ли, изоморфную $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Опишите все конечномерные подалгебры Ли в W_1 .

Задача 9. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем $\mathbb{C}$. Докажите, что следующие условия эквивалентны:

- (а) централизатор любого ненулевого элемента алгебры Ли $\mathfrak{g}$ коммутативен;
- (б) алгебра Ли $\mathfrak{g}$ либо коммутативна, либо содержит коммутативный идеал коразмерности один и имеет тривиальный центр, либо изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$.